Universität Augsburg
Prof. Dr. Hans Ulrich Buhl
Kernkompetenzzentrum
Finanz- & Informationsmanagement
Lehrstuhl für BWL, Wirtschaftsinformatik,
Informations- & Finanzmanagement

Universität Augsburg University

Diskussionspapier WI-154

Integrated Enterprise Balancing mit integrierten Ertrags- und Risikodatenbanken

von

Ulrich Faisst
unter Mitwirkung von Hans Ulrich Buhl

April 2005

in: Wirtschaftsinformatik, 47, 6, 2005, S.403-412
Überarbeitete Fassung: September 2005

Universität Augsburg, 86135 Augsburg
Besucher: Universitätsstr. 12, 86159 Augsburg
Telefon: +49 821 598-4801 (Fax: -4899)
www.fim-online.eu

Angenommener Beitrag für Zeitschrift Wirtschaftsinformatik, Heft 6, 2005.

Titel: „Integrated Enterprise Balancing mit integrierten Ertrags- und Risikodatenbanken“

Autor:
Ulrich Faisst
unter Mitwirkung von Hans Ulrich Buhl

Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre, Wirtschaftsinformatik & Financial Engineering
Kernkompetenzzentrum IT & Finanzdienstleistungen
Universität Augsburg
Universitätsstraße 16
86135 Augsburg
{Ulrich.Faisst|Hans-Ulrich.Buhl}@wiwi.uni-augsburg.de
http://www.wi-if.de

Stand: 29.09.2005; Umfang: ca. 45.000 Buchstaben (incl. Leerzeichen) + 7 Abbildungen

Titel: „Integrated Enterprise Balancing mit integrierten Ertrags- und Risikodatenbanken“

Kernpunkte:

Zur Unterstützung einer wertorientierten Unternehmensführung sowie zur Erfüllung regulatorischer Transparenzanforderungen und gesetzlicher Publizitätsverpflichtungen benötigen Unternehmungen eine unternehmensweit konsistente Datengrundlage mit Ertrags- und Risikoinformationen. Trotz vorhandener technischer Integrationsansätze, bspw. auf Basis von Datawarehouse- und OLAP-Lösungen, fehlen jedoch zum Aufbau integrierter Ertrags- und Risikodatenbanken geeignete finanzwirtschaftliche Methoden und Kennzahlensysteme.

Integrated Enterprise Balancing soll daher Unternehmungen aus allen Branchen in die Lage versetzen, ihre Geschäftstätigkeit mit unternehmensweit einheitlichen Ertrags- und Risikogrößen zu steuern. Das vorgestellte Kennzahlensystem ermöglicht Unternehmungen, Ertrags- und Risikogrößen auf beliebig vielen Aggregationsstufen wertadditiv zu verknüpfen sowie derartige Aggregationen auch für mehrere Dimensionen durchzuführen. Es stellt somit einen Lösungsansatz zum Aufbau integrierter Ertrags- und Risikodatenbanken dar.

Stichworte: Integriertes, IT-unterstütztes Ertrags- und Risikomanagement, wertorientierte Unternehmensführung, Konsistenzanforderungen an Ertrags- und Risikodatenbanken

Abstract:

“Integrated Enterprise Balancing with integrated return and risk databases”

To support a value-based management and to satisfy regulatory transparency requirements and legal reporting obligations, corporations require a corporate-wide consistent database with return and risk information. Despite existing technical integration approaches, such as datawarehouse or OLAP solutions, the development of corporate-wide consistent return and risk databases is so far impossible, as adequate financial methods and performance measurement systems are lacking.

Integrated Enterprise Balancing enables corporations of all industries to control their business activities with corporate-wide consistent return and risk measures. The presented performance measurement system enables corporations to additively connect return and risk measures on arbitrary aggregation levels and to perform such an aggregation also within multiple dimensions. Hence, it is a conceptual solution for the development of integrated return and risk databases.

Keywords: Integrated, IT-enabled return and risk management, value-based management, requirements on the consistency of return and risk databases

Anmerkung: Eine Reihe von mathematischen Beweisführungen befinden sich im Anhang dieses Beitrags. Dieser wird den interessierten Lesern über die Online-Ausgabe der Zeitschrift Wirtschaftsinformatik unter http://www.wirtschaftsinformatik.de/ und über die Homepage des Lehrstuhls WI-IF unter http://www.wi-if.de/Publikationen/ zur Verfügung gestellt.

1 Einleitung

Unternehmungen sehen sich einer Ausgangslage gegenüber, in der eine unternehmensweit konsistente Betrachtung von Ertrags- und Risikogrößen zur Unterstützung einer wertorientierten Unternehmensführung und zur Erfüllung regulatorischer Transparenzanforderungen und gesetzlicher Publizitätsverpflichtungen (z. B. für börsennotierte Unternehmungen in Deutschland nach dem KonTraG [SaBr99] bzw. in den USA nach dem Sarbanes-Oxley Act [SOA02]) immer wichtiger wird. Dazu ist eine Gesamtbetrachtung der Ertrags- und Risikoposition der Unternehmung nicht ausreichend. Eine Unternehmung muss auch in der Lage sein, die Ertrags- und Risikobeiträge ihrer Teilbereiche auf unterschiedlichen Aggregationsstufen in unterschiedlichen Dimensionen (z. B. Kunden-, Produktgruppen) bis hin zum Einzelgeschäft zu messen und unterschiedliche interne Entscheidungsträger (z. B. Vorstände, Bereichsleiter) sowie externe Stakeholder (z. B. Shareholder, Aufsichtsbehörden) konsistent mit zielgruppengerechten Ertrags- und Risikoinformationen zu versorgen.

Zum Aufbau einer entsprechenden Datengrundlage fehlt es jedoch an geeigneten finanzwirtschaftlichen Methoden und Kennzahlensystemen. Speziell die durchgängige Modellierung einheitlicher Risikogrößen, mit denen eine konsistente Aggregation über mehrere Aggregationsstufen in beliebigen Dimensionen möglich ist, bereitet den Unternehmungen Schwierigkeiten. Darüber hinaus besitzen Unternehmungen zumeist historisch gewachsene, heterogene Systemlandschaften mit zweckspezifischen „Silosystemen“, in welchen Ertrags- und Risikoinformationen verteilt und nicht integriert vorliegen. Die Unterstützung der Planungs- und Kontrollprozesse erfolgt häufig mit Spreadsheet-basierten „Schattensystemen“ (bspw. MS Excel). So nutzen nach einer Umfrage [IBM03] unter weltweit ca. 450 Finanzvorständen 81% der Finanzbereiche weltweit agierender Unternehmungen Spreadsheets zur Unterstützung der internen Planungs- und Kontrollprozesse.

Zwar wurden vielfältige Ansätze zur technischen Integration (vgl. [Mert04]), wie zur Daten-, Prozess-, Methoden- und Anwendungsintegration, entwickelt und erfolgreich umgesetzt. So sind bspw. die technischen Voraussetzungen zum Aufbau einer konsistenten Datengrundlage durch entsprechende Datawarehouse- und OLAP-Lösungen bereits gegeben. Zudem hat die SAP AG bereits ein mehrzweckfähiges Datenmodell zur gemeinsamen Unterstützung der neuen IFRS- und Basel-II-Anforderungen entwickelt. Dennoch fehlen bislang adäquate finanzwirtschaftliche Methoden und Kennzahlensysteme zum Aufbau integrierter Ertrags- und Risikodatenbanken, die eine unternehmensweit konsistente Informationsversorgung mit Ertrags- und Risikoinformationen ermöglichen.

Vor diesem Hintergrund besteht die Vision von Integrated Enterprise Balancing darin, es Unternehmungen aus allen Branchen durch integrierte Ertrags- und Risikomanagementsysteme zu ermöglichen, ihre Geschäftstätigkeit in allen Unternehmensfunktionen konsistent nach einheitlichen Ertrags- und Risikogrößen zu steuern (Bild 1). Um optimale Entscheidungen bei Zugrundelegung einer Zielfunktion der wertorientierten Unternehmensführung treffen zu können, sollen sowohl regulatorische Nebenbedingungen als auch Reportinganforderungen an unterschiedliche Stakeholder berücksichtigt werden. Eine gemeinsame Datengrundlage soll dazu Informationen aus den Bereichen **R**eturn, **R**isk, **R**egulations und **R**eporting (4R) konsistent abbilden.

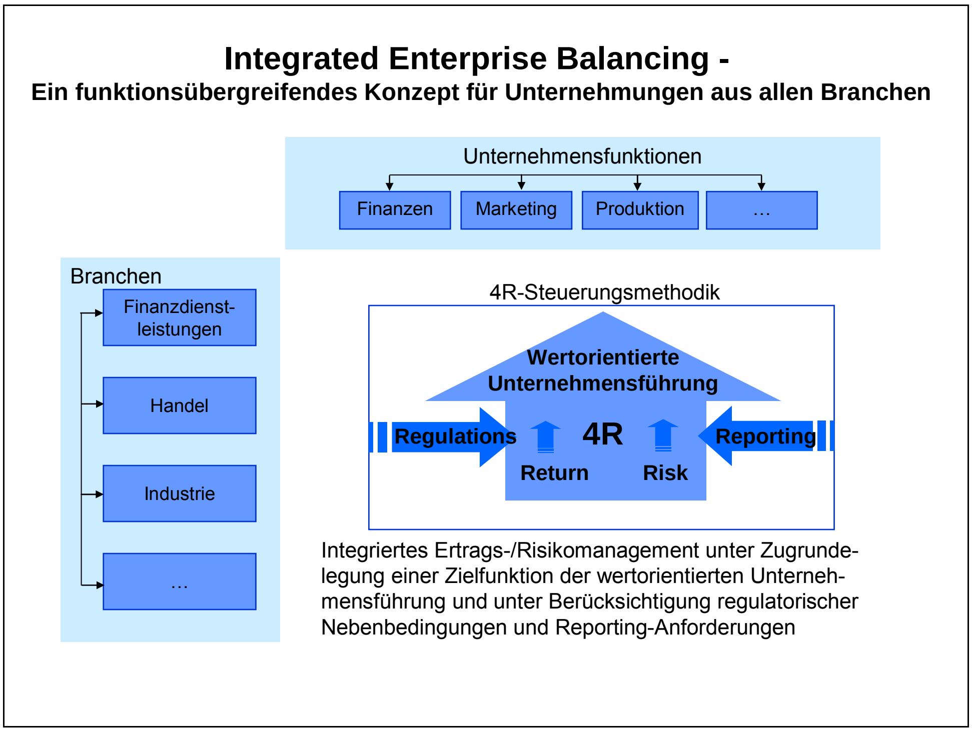

Bild 1 Integrated Enterprise Balancing

Dieser Beitrag formuliert Anforderungen an ein 4R-Kennzahlensystem und stellt einen ersten Lösungsansatz zur Schaffung einer unternehmensweit konsistenten Datengrundlage zum Aufbau integrierter Ertrags- und Risikodatenbanken vor. Auf Basis eines kurzen Überblicks über den State-of-the-Art der finanzwirtschaftlichen Konzepte zum integrierten Ertrags- und Risikomanagement werden folgende Forschungsfragen untersucht:

1. Welche Anforderungen sind an ein 4R-Kennzahlensystem zu stellen? Welche finanzwirtschaftlichen Lösungsansätze gibt es zum Aufbau einer unternehmensweit konsistenten Datengrundlage?
2. Wie kann ein 4R-Kennzahlensystem eine wertadditive Aggregation jeweils von Ertrags- und Risikogrößen sowie Wertbeiträgen über beliebig viele Aggregationsstufen ermöglichen? Wie kann eine solche Aggregation jeweils in mehreren Dimensionen erfolgen?
3. Welche Konsistenzanforderungen sind an die finanzwirtschaftlichen Größen und Parameter zu stellen, um den Aufbau integrierter Ertrags- und Risikodatenbanken zu unterstützen?

Diese Forschungsfragen werden in den folgenden Abschnitten beantwortet und auf dieser Basis ein Ausblick auf Herausforderungen für die Wirtschaftsinformatik in diesem Bereich gegeben.

2 Finanzwirtschaftliche Methoden zum integrierten Ertrags- und Risikomanagement

Zum integrierten Ertrags- und Risikomanagement wurden im Laufe der Zeit eine Vielzahl von finanzwirtschaftlichen Methoden, Konzepten und Kennzahlensystemen entwickelt. Speziell in der Finanzdienstleistungsbranche, aber auch in der betrieblichen Finanzwirtschaft haben sich Kennzahlenkonzepte wie risikobereinigte Rentabilitätskennzahlen (RAPM: Risk Adjusted Performance Measures) und Residualgewinnkonzepte (z. B. EVA: Economic Value Added) etabliert: Bei RAPM besteht die grundsätzliche Vorgehensweise in der Risikoadjustierung einer erwarteten Rendite um das zur Unterlegung eines risikobehafteten Geschäfts eingesetzte Risikokapital mittels Quotientenbildung (vgl. [BaKu00]). RAPM können entweder im Zähler oder im Nenner oder in Zähler und Nenner risikobereinigt sein: $\text{RAPM} = (\text{risk - adjusted})\ \text{Return} / (\text{risk - adjusted})\ \text{Capital}$. Alternativ dazu basieren Residualgewinnkonzepte, wie EVA, auf der Messung des absoluten Wertzuwachses abzüglich der Kapitalkosten (vgl. [Host96]).

Aufgrund ihrer einfachen Anwendbarkeit besitzen RAPM und EVA eine große Verbreitung in der Praxis. Der Aufbau von konsistenten, integrierten Ertrags- und Risikodatenbanken ist mit diesen Konzepten aber i. d. R. nicht möglich, da bei deren Anwendung insb. folgende Probleme auftreten:

- Bei RAPM und EVA werden Risikobewertungen auf niedrigen Aggregationsstufen normalerweise als Stand-alone-Bewertungen von Einzelgeschäften (bzw. Teilportfolios) eines Portfolios durchgeführt. Bestehende Diversifikationseffekte zwischen Einzelgeschäften (bzw. Teilportfolios) werden erst nach der Aggregation zu einem Portfolio auf einer höheren Aggregationsstufe berücksichtigt. Daher entspricht die Summe der Einzelrisikobewertungen der Einzelgeschäften (bzw. Teilportfolios) i. d. R. nicht der Gesamtrisikobewertung des Portfolios. Eine einfache additive Aggregation der Einzelrisikobewertungen zu einer Gesamtrisikobewertung ist daher nicht möglich.
- Werden die verwendeten Ertrags- und Risikogrößen bereits auf niedrigeren Aggregationsstufen zu einer risikoadjustierten Performancekennzahl (RAPM) bzw. zu einem Wertbeitrag (EVA) verknüpft, so tritt ein Informationsverlust auf höheren Aggregationsstufen ein, sofern die entsprechenden Inputgrößen und Parameter nicht – jeweils separiert – auch auf höheren Aggregationsstufen bestimmt werden.
- Auch wenn die Inputgrößen separiert auf jeder Aggregationsstufe bereitgehalten werden, so besteht bei RAPM ein zusätzliches Problem durch die Quotientenbildung: Durch die Verknüpfung von Ertrags- und Risikogrößen zu relativen Größen ist eine Aggregation auf höheren Aggregationsstufen nicht ohne weiteres möglich. Es können prinzipiell Fälle auftreten, bei denen trotz Verbesserung der RAPM aller Einzelgeschäfte (bzw. Teilportfolios) eines Portfolios auf Gesamtebene des Portfolios eine Verschlechterung eintritt und umgekehrt. Dies stellt den Einsatz als Kennzahlensystem zum integrierten Ertrags- und Risikomanagement zusätzlich in Frage.

Der Aufbau von bottom-up aggregationsfähigen, multidimensionalen Datenbanken für Ertrags- und Risikogrößen sowie Wertbeiträgen kann daher mit den bislang in der Praxis sehr verbreiteten finanzwirtschaftlichen Kennzahlensystemen nicht erfolgen. Es bedarf eines neuartigen Lösungsansatzes als fachliche Grundlage zum Aufbau konsistenter, integrierter Ertrags- und Risikodatenbanken.

3 Finanzwirtschaftliche Anforderungen und Lösungsansätze für ein unternehmensweit konsistentes 4R-Kennzahlensystem

Ausgehend von grundlegenden Aufgaben und Anforderungen wird in diesem Abschnitt ein finanzwirtschaftlicher Lösungsansatz für den Aufbau eines unternehmensweit konsistenten 4R-Kennzahlensystems vorgestellt.

3.1 Grundlegende Aufgaben und Anforderungen an ein 4R-Kennzahlensystem

Um den Aufgaben einer wertorientierten Unternehmensführung einerseits und den Anforderungen regulatorischer Transparenzanforderungen und gesetzlicher Publizitätsverpflichtungen (wie bspw. des KonTraG) andererseits gerecht werden zu können, muss ein 4R-Kennzahlensystem eine konsistente Ertrags- und Risikosteuerung und -überwachung durchgängig über alle Hierarchieebenen ermöglichen (vgl. [Huth03]). Die Ermittlung der Ertrags- und Risikoposition auf Ebene der (Gesamt-) Unternehmung ist nicht ausreichend, sondern bedarf zusätzlich einer unternehmensweiten, kontinuierlichen Analyse der Ertrags- und Risikobeiträge der Teilbereiche der Unternehmung auf unterschiedlichen Aggregationsstufen. Dazu sind Risikoverbundeffekte für die unterschiedlichen Teilbereiche der Unternehmung bis hin zum Einzelgeschäft zu berücksichtigen. Darüber hinaus muss ermittelt werden können, ob ein Teilbereich der Unternehmung einen positiven oder negativen Wertbeitrag erbringt. Das 4R-Kennzahlensystem muss in der Lage sein, Ertrags- und Risikogrößen sowie Wertbeiträge jeweils für beliebige Dimensionen auf beliebig vielen Aggregationsstufen zusammenzufassen, um so konsistente Sichten für unterschiedliche Unternehmensfunktionen (z. B. Finanzen, Marketing, Produktion) gemäß Bild 1 zu ermöglichen.

3.2 Bewertung unsicherer Zahlungsströme durch Ertrags- und Risikogrößen

Zunächst soll begründet werden, warum unsichere Zahlungsströme und nicht andere Rechengrößen, wie bspw. Gewinne oder Deckungsbeiträge, als Basis eines 4R-Kennzahlensystems dienen:

- Am Kapitalmarkt stellen Investoren einen Marktwert für unsichere Zahlungsströme insb. anhand der Barwerte unsicherer Zahlungsströme und deren Schwankungen fest. Unsichere Zahlungsströme sind daher eine objektive Grundlage für Investitionsentscheidungen unter Unsicherheit (vgl. [FrHa03]).
- Zwar gibt es in Unternehmungen neben Zahlungsstrombetrachtungen auch die buchhalterische Rechnungslegung sowie die Kosten- und Leistungsrechnung, jedoch zeigen sich diese als Grundlage für eine marktorientierte Unternehmenssteuerung - aufgrund der mit ihnen verbundenen (subjektiven) Bewertungen - weitaus weniger geeignet als unsichere Zahlungsströme.
- Zusätzlich kann eine im Zeitablauf zunehmende Kongruenz der internen und externen Rechnungslegung festgestellt werden, welche die Bedeutung von Zahlungsströmen zusätzlich stei-

gert: So sehen die Bewertungsansätze nach IFRS/IAS eine marktgerechte Bewertung der Investitionen einer Unternehmung auf Basis von Zahlungsströmen vor.

Eine (Kapital-)marktorientierte Unternehmenssteuerung stellt daher Zahlungsströme bzw. Barwerte von Zahlungsströmen sowie deren Schwankungen in den Fokus der Betrachtungen. Um eine Bewertung von Einzelgeschäften anhand von Zahlungsströmen zu ermöglichen, sind den jeweiligen Einzelgeschäften die durch sie verursachten direkten und indirekten Ein- und Auszahlungen zuzurechnen. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass für jedes Einzelgeschäft die unsicheren Zahlungsüberschüsse sowie deren Verteilung bekannt sind bzw. mit Hilfe von Überführungsrechnungen aus alternativen Rechnungsgrößen generiert werden können, wenngleich in der Praxis ggf. derartige Informationen nicht generell auf Einzelgeschäftsebene vorliegen dürften und geschätzt werden müssen. Je mehr historische Daten jedoch vorliegen bzw. je mehr gleichartige Einzelgeschäfte dazu in einem Portfolio zusammengefasst werden können, umso eher gelingt eine solche Schätzung in der Praxis. Zuordnungsprobleme sollen im Rahmen des Beitrags nicht betrachtet werden.

Zur Bewertung der unsicheren Zahlungsströme sollen Ertrags- und Risikogrößen wie folgt begrifflich aufgefasst werden:

- Der Begriff Ertragsgröße wird in der allgemeinen Betriebswirtschaftslehre üblicherweise als eine buchhalterische Größe verstanden. Aufgrund der Verbreitung des Begriffs Ertrags- und Risikomanagement, welcher hinsichtlich der verwendeten Größen präziser „Management der erwarteten Barwerte aus Zahlungsüberschüssen und deren Risiken" heißen müsste, wird der Begriff Ertragsgröße abweichend davon als Erwartungswert des unsicheren Barwerts eines Zahlungsstroms definiert.
- Die entsprechende Risikogröße soll die Schwankungen des betrachteten, unsicheren Barwerts bewerten.

Auf Basis unsicherer Zahlungsströme und deren Bewertung durch Ertrags- und Risikogrößen werden im Folgenden das 4R-Kennzahlensystem vorgestellt und die Annahmen A1-A6 getroffen; in Anhang 1 werden - zur besseren Übersichtlichkeit und aufgrund der Längenbegrenzung des Beitrags - zusätzliche formale Ergänzungen der Annahmen vorgenommen:

A1) Unsichere Zahlungsströme und Barwerte der Einzelgeschäfte i: *Eine Unternehmung besitze zum Zeitpunkt* t=0 *ein Portfolio aus den laufenden Einzelgeschäften i. Für jedes Einzelgeschäft* i *lässt sich der unsichere Zahlungsstrom* $\tilde{\vec{Z}}^i$ *anhand der unsicheren Zahlungsüberschüsse* $\tilde{z}_t^i$ *über eine Laufzeit* T^i *zu den Zeitpunkten* t=0 *bis* $t=T^i$ *in der folgenden Form angeben:* $\tilde{\vec{Z}}^i = (\tilde{z}_0^i, \tilde{z}_1^i, \tilde{z}_2^i, .., \tilde{z}_{T^i}^i)$. *Der unsichere Barwert* $\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^i)$ *eines Zahlungsstroms* $\tilde{\vec{Z}}^i$ *berechnet sich durch die Diskontierung der Zahlungsüberschüsse* $\tilde{z}_t^i$ *zum Zeitpunkt* t=0 *mit dem risikolosen Zinssatz* r_p^i *(jeweils für die Perioden* p):

$$\tilde{B}W(\vec{\tilde{Z}}^i) = \tilde{z}_0^i + \sum_{t=1}^{T^i} \frac{\tilde{z}_t^i}{\prod_{p=1}^{t}(1+r_p^i)}$$

Die Dichtefunktionen aller betrachteten Zufallsvariablen $\tilde{z}_t^i$ *bzw.* $\tilde{B}W(\vec{\tilde{Z}}^i)$ *sowie der risikolose Zinssatz* r_p^i *seien bekannt.*

A2) Ertragsgröße: *Eine Ertragsgröße* E^i *ist definiert als der Erwartungswert* $E(\tilde{B}W(\vec{\tilde{Z}}^i))$ *des Barwerts* $\tilde{B}W(\vec{\tilde{Z}}^i)$ *zum Zeitpunkt* t=0. *Es gilt:* $E^i = E(\tilde{B}W(\vec{\tilde{Z}}^i))$.

A3) Risikogröße: *Die unsicheren Zahlungsströme* $\vec{\tilde{Z}}^i$ *der Einzelgeschäfte* i *werden zu einem unsicheren Gesamtzahlungsstrom des Portfolios* U *der Unternehmung* $\vec{\tilde{Z}}^U$ *mit* $\vec{\tilde{Z}}^U = \sum_i \vec{\tilde{Z}}^i$ *zusammengefasst. Eine Risikogröße* R^i *bewertet den absoluten Risikobeitrag des Barwerts* $\tilde{B}W(\vec{\tilde{Z}}^i)$ *eines Einzelgeschäfts* i *zum absoluten Gesamtrisiko* R^U *des Barwerts* $\tilde{B}W(\vec{\tilde{Z}}^U)$ *der Unternehmung. Zur Bewertung wird die Kovarianz zwischen dem Barwert* $\tilde{B}W(\vec{\tilde{Z}}^i)$ *des Einzelgeschäfts* i *und dem Barwert* $\tilde{B}W(\vec{\tilde{Z}}^U)$ *des Portfolios* U *der Unternehmung zum Zeitpunkt* t=0 *verwendet (vgl. [Huth03]). Es gilt:*

$$R^i = Cov_{i,U} = \rho_{i,U} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_U$$

mit:

$Cov_{i,U}$: Kovarianz zwischen dem Barwert $\tilde{B}W(\vec{\tilde{Z}}^i)$ und dem Barwert $\tilde{B}W(\vec{\tilde{Z}}^U)$, jeweils in t=0.

$\rho_{i,U}$: Korrelation zwischen dem Barwert $\tilde{B}W(\vec{\tilde{Z}}^i)$ und dem Barwert $\tilde{B}W(\vec{\tilde{Z}}^U)$, jeweils in t=0.

σ_i: Standardabweichung des Barwerts $\tilde{B}W(\vec{\tilde{Z}}^i)$ in t=0.

σ_U: Standardabweichung des Barwerts $\tilde{B}W(\vec{\tilde{Z}}^U)$ in t=0.

In den folgenden Abschnitten wird eine *eindimensionale* und darauf aufbauend eine *multidimensionale* Aggregation der Ertrags- und Risikogrößen der Einzelgeschäfte i durchgeführt.

3.3 Eindimensionale Aggregation von Ertrags- und Risikogrößen in einer hierarchischen Baumstruktur

Zunächst wird untersucht, wie Ertrags- und Risikogrößen auf beliebig vielen Aggregationsstufen bei *eindimensionaler* Betrachtung aggregiert werden können. Um die Ertrags- und Risikogrößen der Einzelgeschäfte i einer Unternehmung auf beliebig vielen Aggregationsstufen konsistent verknüpfen zu können, wird in A4 eine hierarchische Baumstruktur zur Abbildung einer hierarchischen Organisationsstruktur definiert.

A4) Hierarchische Baumstruktur

Die Einzelgeschäfte i *einer Unternehmung lassen sich über Teilportfolios auf* n *Aggregationsstufen in einer hierarchischen Baumstruktur bis hin zum Portfolio* U *der Unternehmung zusammenfassen* (mit n $\in \aleph$)*. Eine solche hierarchische Baumstruktur umfasst die Knoten* x(A_k) *auf den Aggregationsstufen* A_k (mit k∈{1, n}*): Der Knoten* U(A_1) *auf der höchsten Aggregationsstufe* A_1 *(Wurzelknoten) repräsentiert das Portfolio* U*, welches alle Einzelgeschäfte* i *der Unternehmung umfasst. Die Knoten* x(A_k) (für k∈{2, n-1}*) der darunter liegenden Aggregationsstufen* A_2 *bis* A_n-1 *(Teilbäume) stellen Teilportfolios der Unternehmung dar. Die Knoten* i(A_n) *der niedrigsten Aggregationsstufe* A_n *(Blätter) vertreten die Einzelgeschäfte* i *der Unternehmung.*

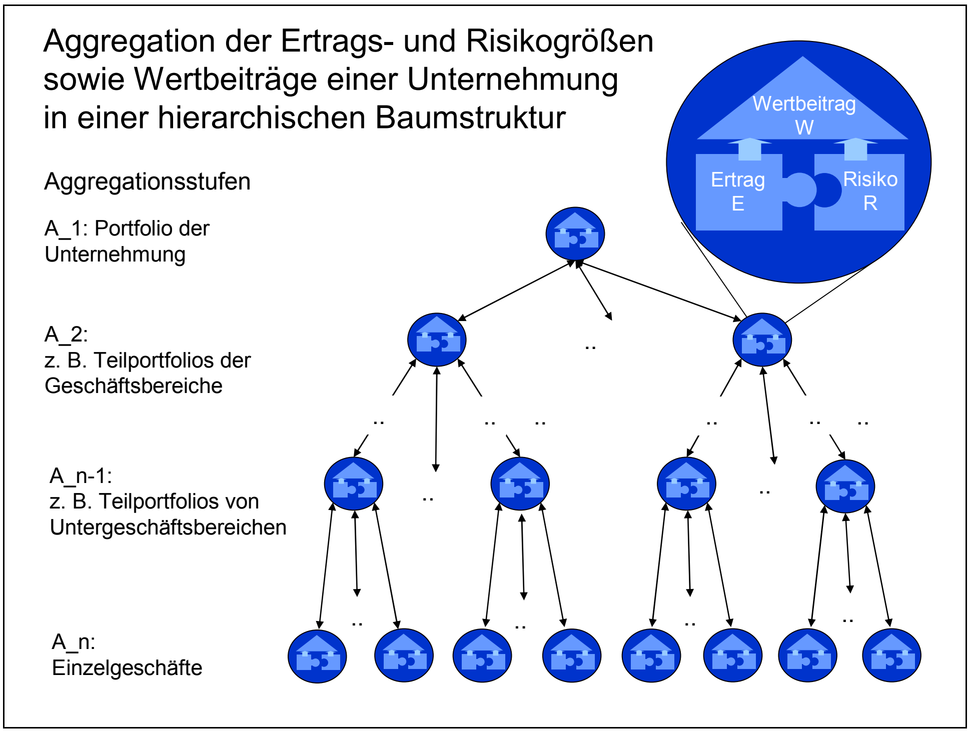

Bild 2 Hierarchische Baumstruktur

Bild 2 zeigt eine hierarchische Baumstruktur zur Aggregation der Einzelgeschäfte einer Unternehmung über beliebig viele Aggregationsstufen. So können Einzelgeschäfte bspw. zunächst zu Teilportfolios einzelner Untergeschäftsbereiche, dann zu Teilportfolios der Geschäftsbereiche und schließlich zum Portfolio U der Unternehmung zusammengefasst werden. Für jedes Teilportfolio bzw. Portfolio x(A_k) soll je eine Ertragsgröße und eine Risikogröße durch Aggregation der entsprechenden Größen der Einzelgeschäfte ermittelt werden. Eine solche Aggregation der Einzelgeschäfte, über Teilportfolios bis hin zum Portfolio der Unternehmung über mehrere Aggregationsstufen hinweg, wird wesentlich erleichtert, wenn die betrachteten Größen die Eigenschaft der Wertadditivität erfüllen.

Die folgende Definition nach [FrHa03] legt allgemein die Eigenschaft der Wertadditivität von finanzwirtschaftlichen Größen als Bewertungsfunktion für unsichere Zahlungsströme fest.

Definition: Wertadditivität einer Bewertungsfunktion für unsichere Zahlungsströme

Eine Bewertungsfunktion $V(\vec{\tilde{Z}})$ *für unsichere Zahlungsströme* $\vec{\tilde{Z}}$ *ist wertadditiv, wenn bei deren Anwendung auf jeweils zwei beliebige Zahlungsströme* $\vec{\tilde{Z}}^i$ *und* $\vec{\tilde{Z}}^j$ *stets gilt, dass die Summe der Bewertungen der beiden Zahlungsströme* $\vec{\tilde{Z}}^i$ *und* $\vec{\tilde{Z}}^j$ *der Bewertung der Summe der Zahlungsströme* $\vec{\tilde{Z}}^i$ *und* $\vec{\tilde{Z}}^j$ *entspricht:* $V(\vec{\tilde{Z}}^i + \vec{\tilde{Z}}^j) = V(\vec{\tilde{Z}}^i) + V(\vec{\tilde{Z}}^j)$.

Die Eigenschaft der Wertadditivität wird im Folgenden für Ertrags- und Risikogrößen sowie Wertbeiträge auf beliebig vielen Aggregationsstufen untersucht.

Wertadditive Aggregation von Ertragsgrößen

Die Eigenschaft der Wertadditivität von Ertragsgrößen setzt die Einhaltung der folgenden Konsistenzanforderung K1 voraus (vgl. [FrHa03]; siehe Beweis in Anhang 2):

Konsistenzanforderung K1: Die Konsistenzanforderung K1 besteht in der *einheitlichen* Verwendung eines *risikofreien Zinssatzes* r_p für alle Einzelgeschäfte i (mit $r_p = r_p^i \forall i$), der für die Diskontierung der Zahlungsüberschüsse $\tilde{Z}_t^i$ in der jeweiligen Periode p anzuwenden ist.

Ergebnis 1: Wenn die Annahmen A1, A2 und A4 sowie die Konsistenzanforderung K1 erfüllt sind, dann können Ertragsgrößen auf beliebigen Aggregationsstufen einer hierarchischen Baumstruktur wertadditiv verknüpft werden:

- Der Gesamtertrag E^{i+j} aus den Einzelgeschäften i und j entspricht der Summe der Erträge E^i und E^j der Einzelgeschäfte i und j: $E^{i+j} = E^i + E^j$ (mit i, j $\in$ {1, I}, i≠j).
- Betrachtet man die einem Portfolio y(A_k) auf einer höheren Aggregationsstufe A_k ($\forall$ k mit 1≤k<n) zugeordneten jeweils paarweise disjunkten Teilportfolios x(A_k+1) einer niedrigeren Aggregationsstufe A_k+1, so gilt für die Ertragsgrößen $E^{x(A\_k+1)}$ Wertadditivität:

  $$E^{y(A\_k)} = \sum_{x(A\_k+1) \subseteq y(A\_k)} E^{x(A\_k+1)}.$$

- Für das Portfolio U der Unternehmung ergibt sich die Ertragsgröße E^U durch eine wertadditive Verknüpfung der Ertragsgrößen $E^{x(A\_k)}$ der Teilportfolios x(A_k) einer bestimmten Aggregationsstufe A_k ($\forall$ k mit 1<k≤n): $E^U = \sum_{x(A\_k)} E^{x(A\_k)} = \sum_i E^i$. Der Gesamtertrag des Portfolios U der Unternehmung ist somit unabhängig von der Aggregationsstufe A_k, auf der die Ertragsgrößen $E^{x(A\_k)}$ der Teilportfolios x(A_k) wertadditiv aggregiert werden, immer gleich hoch.

Im Folgenden wird gezeigt, dass bei Verwendung von geeigneten Kovarianzen als Risikogröße eine wertadditive Aggregation möglich ist.

Wertadditive Aggregation von Risikogrößen

Zur Wertadditivität von Risikogrößen ist – zusätzlich zu K1 – auch die folgende Konsistenzanforderung K2 erforderlich (siehe Beweise in den Anhängen 3-1, 3-2 und 3-3):

Konsistenzanforderung K2: *(vgl. Anhang 5 für eine formale Darstellung)*

K2a): Die Korrelation $\rho_{i,U}$ zwischen einem Einzelgeschäft i(A_n) und dem Portfolio der Unternehmung U(A_1) entspricht dem Produkt der n-1 Korrelationen zwischen den Teilportfolios und den Portfolios auf jeweils benachbarten Aggregationsstufen, deren Knoten durch jeweils genau eine Kante verbunden sind.

K2b): Für die Korrelationen zwischen den Teilportfolios und den Portfolios unterschiedlicher Aggregationsstufen 1≤m<k<n muss gelten, dass die Korrelation $\rho_{x(A\_k+1),\, y(A\_m)}$ zwischen einem Teilportfolio x(A_k+1) und einem Portfolio y(A_m) dem Produkt der Korrelationen zwischen den Teilportfolios auf den dazwischen liegenden Aggregationsstufen entspricht, deren Knoten durch jeweils genau eine Kante verbunden sind.

K2c): Für die Standardabweichung $\sigma_{y(A\_k)}$ eines Portfolios y(A_k) auf einer beliebigen Aggregationsstufe A_k (mit 1≤k<n) muss gelten, dass diese der Summe aus den Produkten der Standardabweichungen $\sigma_{x(A\_k+1)}$ der im Portfolio y(A_k) enthaltenen Teilportfolios x(A_k+1) und der jeweiligen Korrelationen $\rho_{x(A\_k+1),\, y(A\_k)}$ zwischen einem Teilportfolio x(A_k+1) und dem Portfolio y(A_k) entspricht.

Bei der Anwendung empirischer Schätzverfahren zur Bestimmung der Korrelationen und Standardabweichungen ist sicherzustellen, dass die formulierte Konsistenzanforderung K2 erfüllt wird.

Ergebnis 2: Wenn die Annahmen A1, A3 und A4 sowie die Konsistenzanforderung K1 und K2 erfüllt sind, dann können Risikogrößen auf beliebigen Aggregationsstufen wertadditiv verknüpft werden:

- Das Gesamtrisiko R^{i+j} aus den Einzelgeschäften i und j entspricht der Summe der Risiken R^i und R^j der Einzelgeschäfte i und j: $R^{i+j} = R^i + R^j$ (mit i, j $\in$ {1, I}, i$\neq$j).
- Betrachtet man die einem Portfolio y(A_k) auf einer höheren Aggregationsstufe A_k (mit 1≤k<n) zugeordneten Teilportfolios x(A_k+1) einer niedrigeren Aggregationsstufe A_k+1, so gilt für die Risikogrößen $R^{x(A\_k+1)}$ Wertadditivität: $R^{y(A\_k)} = \sum_{x(A\_k+1) \subseteq y(A\_k)} R^{x(A\_k+1)}$.
- Für das Portfolio U der Unternehmung ergibt sich die Risikogröße R^U durch eine wertadditive Verknüpfung der Risikogrößen $R^{x(A\_k)}$ der Teilportfolios x(A_k) einer bestimmten Aggregationstu-

fe A_k ($\forall$ k mit 1<k≤n): $R^{U} = \sum_{x(A\_k)} R^{x(A\_k)} = \sum_{i} R^{i}$. Das Gesamtrisiko des Portfolios U der Unternehmung ist somit unabhängig von der Aggregationsstufe A_k, auf der die Risikogrößen $R^{x(A\_k)}$ der Teilportfolios x(A_k) wertadditiv aggregiert werden, immer gleich hoch.

Legt man wertadditive Risikogrößen zugrunde, so können integrierte Ertrags- und Risikodatenbanken Anfragen zur bottom-up Aggregation auf sehr einfache Weise, ohne Zuhilfenahme von Simulationsverfahren, bearbeiten.

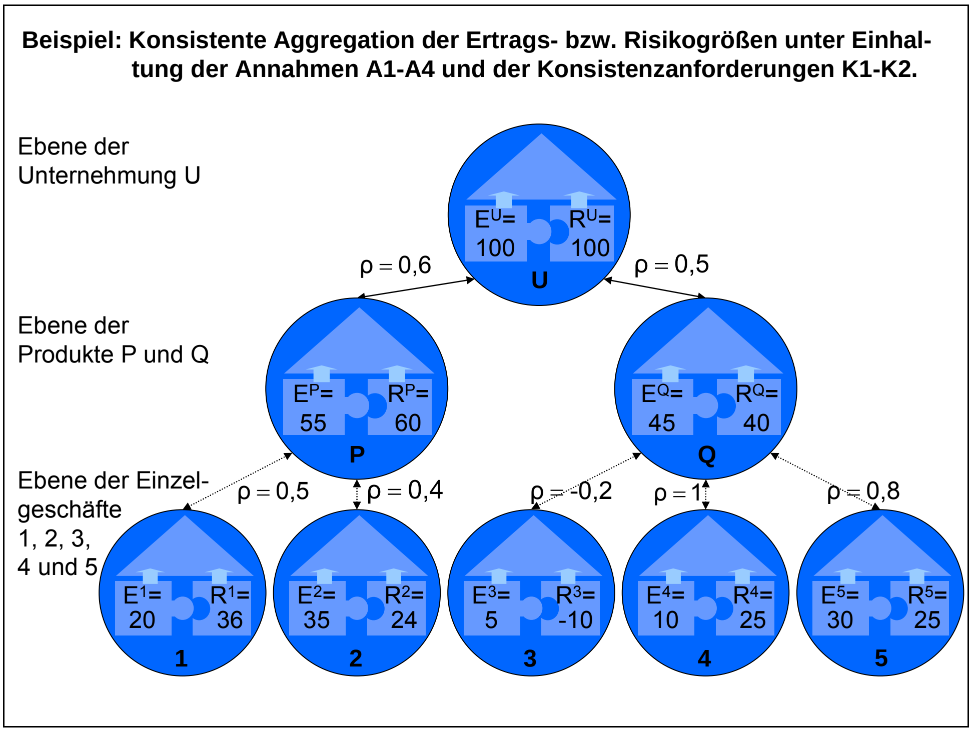

Bild 3 Verteilungsfreie, eindimensionale Aggregation von Ertrags- bzw. Risikogrößen in einer hierarchischen Baumstruktur

Das Beispiel in Bild 3 veranschaulicht eine solche bottom-up Aggregation von Ertrags- bzw. Risikogrößen einer Unternehmung auf analytischem Wege (vgl. Anhang 6-1 für die Berechnungen). Eine derartige wertadditive Aggregation setzt die Einhaltung der Konsistenzanforderungen K1-K2 an die eingehenden Parameter, insb. Diskontierungszinssätze, Korrelationen und Standardabweichungen, voraus. Mag eine solche Aggregation für fünf Einzelgeschäfte, wie im Beispiel, auch ohne die Bildung von Zwischenaggregationsstufen noch einfach durchführbar erscheinen, so zeigen sich jedoch bei großen Portfolios Vorteile durch die Möglichkeit der Parallelisierung der Berechnungen auf Zwischenaggregationsstufen für Teilbereiche und die Verhinderung einer Parameterexplosion bei den Vorberechnungen zur empirischen Schätzung der Risikoparameter.

Im Folgenden wird dargelegt, dass bei Anwendung *multidimensionaler*, hierarchischer Baumstrukturen ebenso eine wertadditive Aggregation der Ertrags- und Risikogrößen möglich ist.

3.4 *Multidimensionale Aggregation von Ertrags- und Risikogrößen*

Eine multidimensionale Betrachtung der Einzelgeschäfte ist zur Unterstützung mehrerer Unternehmensfunktionen (nach Bild 1) erforderlich, um eine Aggregation jeweils in mehreren Dimensionen (bspw. Kunden, Produkte) zugleich durchführen zu können.

A5) Multidimensionale, hierarchische Baumstruktur

Um multidimensionale Sichten auf die Unternehmung zu unterstützen, wird für jede Dimension Dim_d *(mit* d $\in \aleph$) *jeweils eine hierarchische Baumstruktur abgebildet. Die Einzelgeschäfte* i, *repräsentiert durch die Knoten* i(A_n), *und das Portfolio* U *der Unternehmung, repräsentiert durch den Knoten* U(A_1), *sind einheitlich für alle Dimensionen. Auf den Aggregationsstufen* A_k *mit* k $\in \aleph$ *und* 1<k<n *repräsentieren die Knoten* x(A_k, Dim_d) *jeweils Teilportfolios der Unternehmung bei einer Betrachtung in einer bestimmten Dimension* Dim_d.

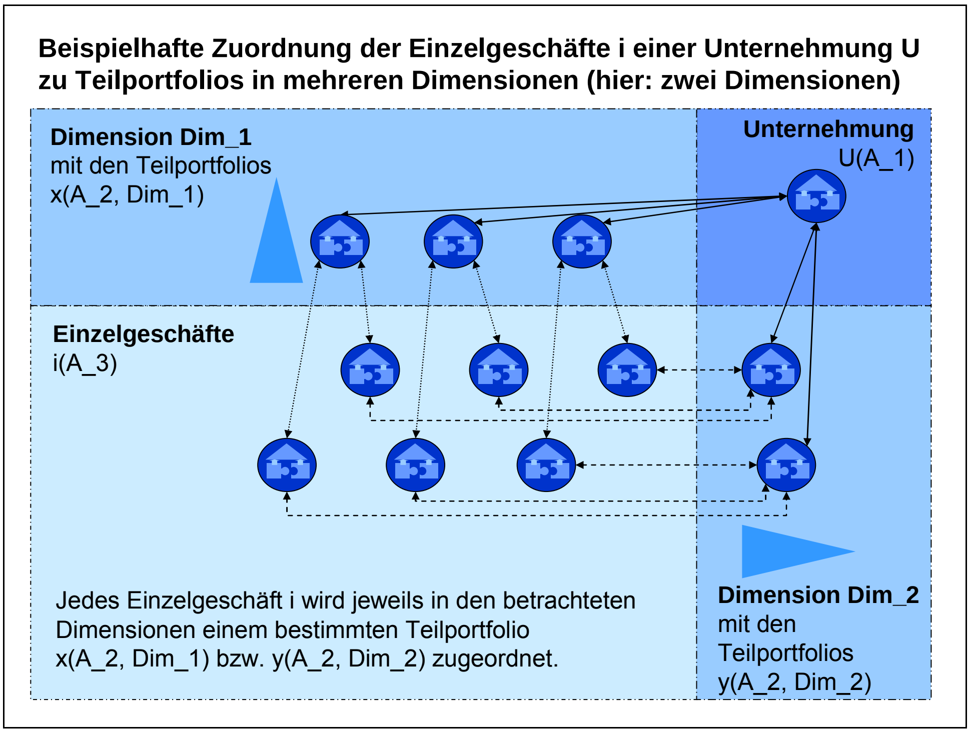

Bild 4 Multidimensionale, hierarchische Baumstruktur

Bild 4 zeigt die gleichzeitige Anwendung hierarchischer Baumstrukturen für mehrere Dimensionen, eine so genannte multidimensionale, hierarchische Baumstruktur. Beispielhaft wird für die beiden Dimensionen Dim_1 bzw. Dim_2 jeweils eine Zuordnung der Einzelgeschäften i zu den Teilportfolios x(A_2, Dim_1) bzw. y(A_ 2, Dim_2) vorgenommen. Wie durch die Dreiecke in Bild 4 angedeutet, kann eine Aggregation dieser Teilportfolios in den jeweiligen Dimensionen auf weiteren dimensionsspezifischen Zwischenaggregationsstufen gemäß A5 stattfinden. Auf die Darstellung weiterer Zwischenaggregationsstufen wurde aus Gründen der leichteren Anschaulichkeit verzichtet und nur eine Aggregationsstufe in beiden Dimensionen verwendet. Bei multidimensionalen Aggregationen sind weitere Konsistenzanforderungen an die verwendeten Größen und Parameter zu stellen. Aufgrund der Betrachtung der Korrelationen im Anhang 3-3 stellt sich folgende Konsistenzanforderung K3 an die Risikoparameter innerhalb multidimensionaler, hierarchischer Baumstrukturen:

Konsistenzanforderung K3: *(vgl. Anhang 5 für eine formale Darstellung)*

K3a): Unabhängig von der betrachteten Dimension sind folgende Parameter einheitlich zu schätzen, da sie zugleich für alle betrachteten Dimensionen relevant sind:

- die Standardabweichungen σ_i der Einzelgeschäfte i,
- die Standardabweichung σ_U des Portfolios U der Unternehmung sowie
- die Korrelationen $\rho_{i,U}$ zwischen den Einzelgeschäften i und dem Portfolio U der Unternehmung.

K3b): Bei Betrachtung beliebiger Dimensionen Dim_e und Dim_f gilt: In jeder betrachteten Dimension muss die Korrelation $\rho_{i,U}$ zwischen einem Einzelgeschäft i und dem Portfolio U der Unternehmung jeweils dem Produkt der Korrelationen zwischen den Teilportfolios und den Portfolios auf jeweils benachbarten Aggregationsstufen einer Dimension entsprechen, deren Knoten durch jeweils genau eine Kante verbunden sind.

K3c): Für die Standardabweichung $\sigma_{y(A\_k,\,Dim\_d)}$ eines Portfolios y(A_k, Dim_d) auf einer beliebigen Aggregationsstufe A_k (mit 1≤k<n) einer beliebigen Dimension Dim_d muss gelten, dass diese der Summe aus den Produkte der Standardabweichungen $\sigma_{x(A\_k+1,\,Dim\_d)}$ der in y(A_k, Dim_d) enthaltenen Teilportfolios x(A_k+1, Dim_d) mit den jeweiligen Korrelationen $\rho_{x(A\_k+1,Dim\_d),\,y(A\_k,\,Dim\_d)}$ zwischen einem Teilportfolio x(A_k+1, Dim_d) und dem Portfolio y(A_k, Dim_d) entspricht.

Ergebnis 3: Wenn die Annahmen A1-A5 sowie die Konsistenzanforderungen K1-K3 erfüllt sind, dann ist eine wertadditive Aggregation von Ertrags- und Risikogrößen auch in mehreren Dimensionen auf konsistente Weise möglich:

- Ertragsgrößen sind deterministisch und können bei überschneidungsfreier Zuordnung in multidimensionalen Baumstrukturen (nach A5) wertadditiv aggregiert werden.
- Durch die Verwendung von Kovarianzen als Risikomaß der Einzelgeschäfte ist auch bei multidimensionaler Betrachtung eine wertadditive Aggregation der Risikogrößen bis hin zum Portfolio U der Unternehmung unter Berücksichtigung der Korrelationseffekte möglich. Eine wertadditive Aggregation der Risikogrößen der Einzelgeschäfte i über die Teilportfolios x(A_k, Dim_d) kann für jeweils eine bestimmte Dimension Dim_d bis hin zum Portfolio U der Unternehmung durchgeführt werden.

Auf Basis des 4R-Kennzahlensystems aufgebaute integrierte Ertrags- und Risikodatenbanken sind in der Lage, OLAP-Anfragen über Ertrags- und Risikogrößen in multidimensionalen Sichten auf konsistente Weise zu unterstützen.

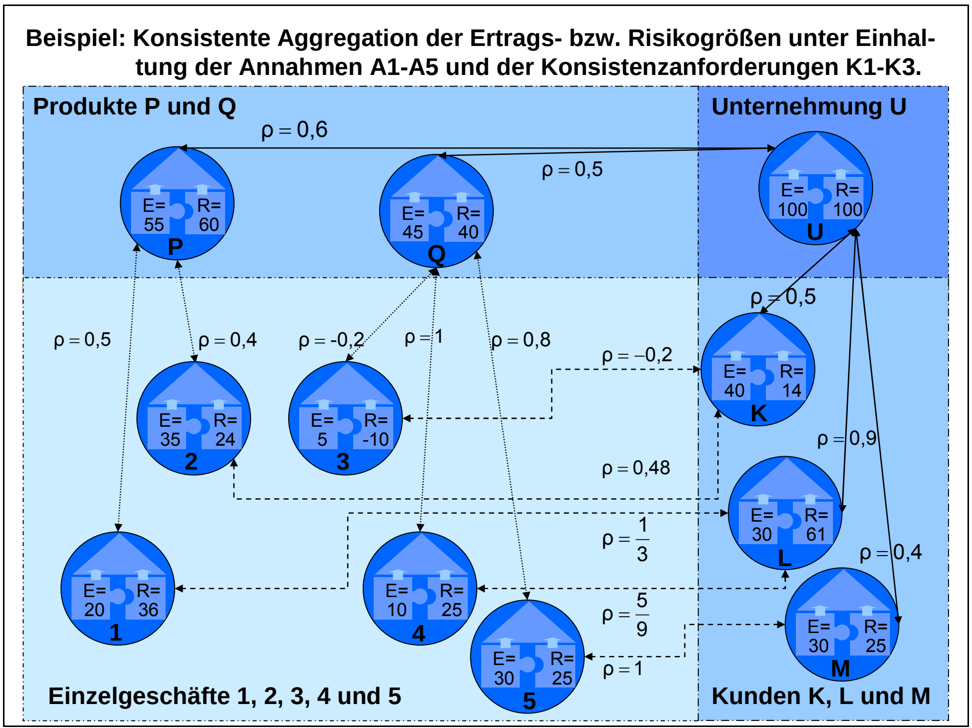

Bild 5 Verteilungsfreie, multidimensionale Aggregation von Ertrags- bzw. Risikogrößen in einer multidimensionalen, hierarchischen Baumstruktur

Das Beispiel in Bild 5 illustriert, dass wertadditive Ertrags- bzw. Risikogrößen eine konsistente Aggregation über Zwischenaggregationsstufen in mehreren Dimensionen, hier zugleich nach Produkten *und* nach Kunden, auf analytischem Wege erlauben (vgl. Anhang 6-2 für die Berechnungen). Eine derartige wertadditive Aggregation setzt zusätzlich die Einhaltung der Konsistenzanforderungen K1-K3; insb. an die eingehenden Korrelationen und Standardabweichungen in den unterschiedlichen Dimensionen, voraus.

3.5 Verknüpfung und Aggregation von Wertbeiträgen

Im Folgenden wird dargelegt, unter welchen Bedingungen Ertrags- und Risikogrößen zu Wertbeiträgen im Sinne von Sicherheitsäquivalenten verknüpft werden können und wie diese über beliebig viele Aggregationsstufen in beliebigen Dimensionen aggregiert werden können.

Additive Verknüpfung von Ertrags- und Risikogrößen zu Wertbeiträgen

Im Sinne einer wertorientierten Unternehmensführung stellt ein (barwertiger) Wertbeitrag eine risikoadjustierte Größe für den absoluten Wertzuwachs dar, welche durch die Verknüpfung von Ertrags- und Risikogrößen berechnet wird. Die bisher definierten Ertrags- und Risikogrößen sind für alle Verteilungen der zu bewertenden unsicheren Barwerte anwendbar. Um Wertbeiträge im Sinne von Sicherheitsäquivalenten ermitteln zu können, sieht Annahme A6 vor, dass die zugrunde liegenden unsicheren Barwerte der Einzelgeschäfte i der Unternehmung normalverteilt sind. Eine solche Annahme normalverteilter Barwerte der Einzelgeschäfte erscheint für Einzelgeschäfte, die hauptsächlich Markt- und Kreditrisiken aufweisen, ggf. unter Zuhilfenahme entsprechend transformierter Zufallsvariablen, gut bis sehr gut geeignet, i. d. R. jedoch nicht für operationelle Risiken.

A6) (Barwertiger) Wertbeitrag

Es wird angenommen, dass die unsicheren Barwerte $\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^i)$ *der Einzelgeschäfte* i *der Unternehmung als normalverteilte Zufallsvariablen (mit der Notation* $\widetilde{BW}*(\tilde{\vec{Z}}^i)$*) betrachtet werden können. Mit Hilfe einer Integrationsfunktion* $V_{Int,BW^*}(E^i_{BW^*}, R^i_{BW^*})$ *auf Basis einer klassischen Präferenzfunktion der Form* $\Phi(\mu,\sigma) = \mu - \frac{\alpha}{2}\sigma^2$ *aus der Entscheidungstheorie (vgl. z. B. [Schn67]) werden eine (barwertige) Ertragsgröße und eine (barwertige) Risikogröße zu einem (barwertigen) Wertbeitrag* $W^i_{BW^*}$ *additiv verknüpft:*

$$W^i_{BW^*} = V_{Int,BW^*}(E^i_{BW^*}, R^i_{BW^*}) = a^i \cdot E^i_{BW^*} - b^i \cdot R^i_{BW^*} = a^i \cdot E(\widetilde{BW}*(\tilde{\vec{Z}}^i)) - b^i \cdot Cov_{BW^*}(i,U)$$

mit:

a^i : Konstante $\in \Re^+$; b^i : Konstante $\in \Re$

Ein (barwertiger) Wertbeitrag $W^i_{BW^*} \in \Re$ ist skalar und wird in Geldeinheiten ausgedrückt. $W^i_{BW^*}$ wird im Weiteren vereinfachend als Wertbeitrag bezeichnet.

Anmerkung zur Präferenzfunktion in A6: Die dargestellte Präferenzfunktion stellt eine betriebswirtschaftliche fundierte Variante der Risikoabschlagsmethode dar. Die Bildung von risikoadjustierten Wertbeiträgen ergibt sich in der Praxis häufig durch die Durchführung eines methodisch i. d. R. weitaus weniger fundierten Risikoabschlags auf die Erträge risikobehafteter Einzelgeschäfte, wie in Abschnitt 2 diskutiert.

Ergebnis 4a: Für die Einzelgeschäfte i kann bei einem gegebenen Portfolio anhand des Wertbeitrags $W^i_{BW^*}$ deren absoluter risikoadjustierter Beitrag zum Vermögenszuwachs der Unternehmung abgelesen werden. Sofern Annahme A6 gilt, entspricht ein Wertbeitrag $W^i_{BW^*}$ dem Sicherheitsäquivalent eines unsicheren, normalverteilten Barwerts $\widetilde{BW}*(\tilde{\vec{Z}}^i)$. Die Konstante b^i in obiger Integrationsfunktion drückt die individuelle Rendite-/Risikoeinstellung aus: $b^i = 0$: Risikoneutralität; $b^i > 0$: Risikoaversion; $b^i < 0$ Risikofreude.

Wertadditive Aggregation von Wertbeiträgen

Zur Wertadditivität von Wertbeiträgen wird vorausgesetzt, dass die folgende Konsistenzanforderung K4 erfüllt ist (vgl. Beweis in Anhang 4):

Konsistenzanforderung K4: Es sind unternehmensweit einheitliche, konstante Parameter a und b mit $a = a^i = a^U \; \forall i$ und $b = b^i = b^U \forall i$ in der Integrationsfunktion $V_{Int,BW^*}(E^i_{BW^*}, R^i_{BW^*})$ für alle Teilportfolios x(A_k, Dim_d) anzuwenden.

Ergebnis 4b: Wenn wertadditive Ertragsgrößen und wertadditive Risikogrößen verwendet werden, zugleich Ertrags- und Risikogrößen additiv verknüpft werden und zusätzlich die Annahme A6 und die Konsistenzanforderung K4 erfüllt sind, dann sind Wertbeiträge wertadditiv. Wertadditive Wertbeiträge können für beliebige Einzelgeschäfte über Teilportfolios in beliebigen Dimensionen bis hin zum Portfolio U der Unternehmung verknüpft werden. Die konsistente Verwendung von a und b sichert eine unternehmensweit einheitliche Rendite-/Risikoeinstellung und somit einheitliche ‚Preise' pro Einheit Ertrag (bewertet mit dem Faktor a) bzw. pro Einheit Risiko (bewertet mit dem Faktor b) bei der Bestimmung der Wertbeiträge.

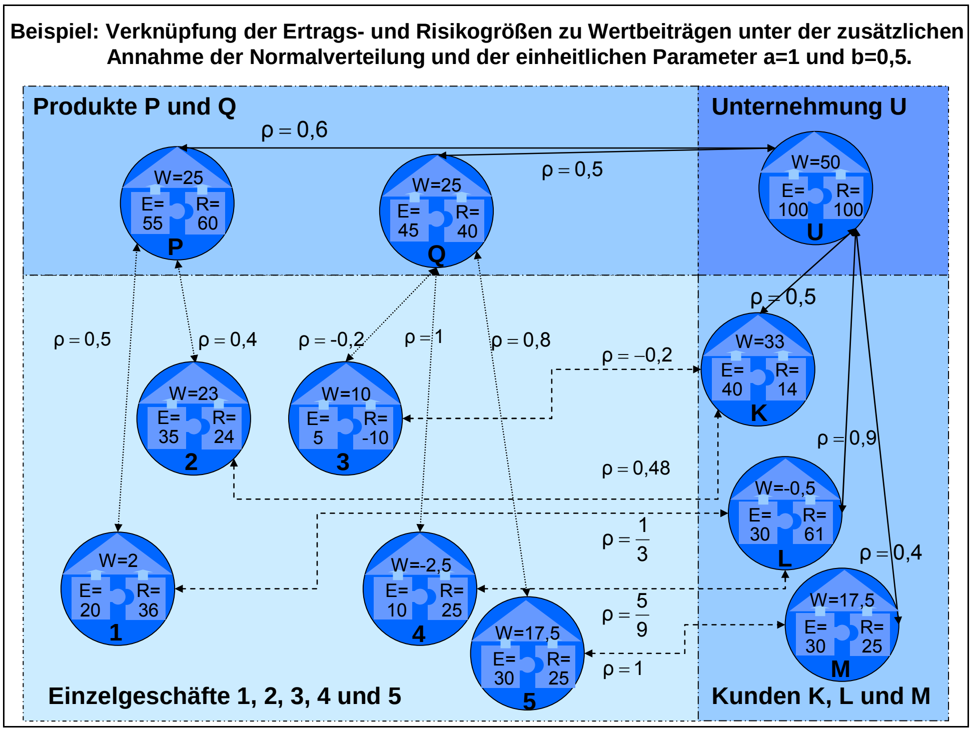

Bild 6 Verknüpfung und Aggregation von Wertbeiträgen in einer multidimensionalen, hierarchischen Baumstruktur

Das Beispiel in Bild 6 demonstriert die Verknüpfung von Ertrags- und Risikogrößen zu Wertbeiträgen (vgl. Anhang 6-3 für die Berechnungen). Man erhält jeweils das gleiche Ergebnis für den Wert der Unternehmung und seiner Teilportfolios unabhängig davon, ob Ertrags- und Risikogrößen zunächst zu Wertbeiträgen verknüpft und anschließend über Zwischenaggregationsstufen zum Wert(-beitrag) der Unternehmung aggregiert werden, oder ob dies in umgekehrter Reihenfolge geschieht. Dies unterstreicht die Konsistenz des vorgestellten 4R-Kennzahlensystems.

4 Fazit und Ausblick

Unternehmungen benötigen im Rahmen einer wertorientierten Unternehmensführung, insb. zur Unterstützung von Entscheidungen, zur Performanceanalyse sowie zur Überwachung der Risikotragfähigkeit Informationen über die Ertrags- und Risikobeiträge ihrer Teilportfolios zum Unternehmensportfolio. Für jeden dieser Blickwinkel erscheint eine marktgerechte Bewertung auf Basis unsicherer Zahlungsströme und deren Barwerte objektiver als die Anwendung von subjektiven bewertungsabhängigen Rechengrößen, wie Gewinnen oder Deckungsbeiträgen. Dazu wird im Rahmen dieses Beitrags ein 4R-Kennzahlensystem vorgestellt, welches Unternehmungen bei der Bewertung unsicherer Zahlungsströme durch Ertrags- und Risikogrößen unterstützt und – verteilungsfrei – eine konsistente Aggregation von Ertrags- und Risikogrößen auf beliebigen Aggregationsstufen (z. B. Einzelgeschäfte, Geschäftsbereiche, Unternehmung) in beliebigen Dimensionen (z. B. Kundengruppen, Produktgruppen) ermöglicht. Unter der zusätzlichen Annahme normalverteilter Barwerte werden die Ertrags- und Risikogrößen zu (risikoadjustierten) Wertbeiträgen verknüpft. Darüber hinaus können – bei Vorliegen normalverteilter Barwerte – die betrachteten Risikogrößen mit Hilfe einfacher Quantil-Faktoren zu Value-at-Risk-Größen umgerechnet werden (vgl. Anhang 7).

Um den Aufbau integrierter Ertrags- und Risikodatenbanken, speziell die bottom-up Aggregation, wesentlich zu erleichtern, setzt das vorgestellte 4R-Kennzahlensystem auf einem wertadditiven Ansatz für Ertrags- und Risikogrößen sowie Wertbeiträgen auf. Während erwartete Barwerte mehrerer Zahlungsströme bei Verwendung einheitlicher, periodischer Zinssätze unproblematisch wertadditiv aggregierbar sind (vgl. [FrHa03]), gilt dies für Risikogrößen nur bei Anwendung des Varianz-Kovarianz-Ansatzes (vgl. [CoWe88]). Um wertadditive Wertbeiträge zu erhalten, sind wertadditive Ertrags- und Risikogrößen additiv und mit einheitlichen Parametern zu verknüpfen.

Der vorgestellte Ansatz ist unternehmensweit einsetzbar, sofern die eingehenden Größen und Parameter für die betrachteten Teilbereiche der Unternehmung bekannt sind bzw. überführt oder geschätzt werden können. Zugleich müssen die Größen und Parameter eine Reihe von Konsistenzanforderungen erfüllen, die bei der Umsetzung in relationalen Ertrags- und Risikodatenbanken durch entsprechende Integritätsbedingungen und Trigger zu berücksichtigen sind (vgl. z. B. [Kemp01]).

Das 4R-Kennzahlensystem besitzt insb. folgende Limitationen:

- Die Größen und Parameter des 4R-Kennzahlensystems bilden nur das erste und zweite Moment der Verteilung von Zufallsvariablen (hier: unsichere Barwerte) ab. Zwar könnte eine Betrachtung höherer Momente Entscheidern weitere Informationen über die zugrunde liegenden Verteilungen liefern, jedoch ist für sie eine wertadditive Aggregation in mehreren Dimensionen in integrierten Ertrags- und Risikodatenbanken i. d. R. nicht möglich.
- Die abgebildeten Korrelationen beschreiben nur lineare Zusammenhänge zwischen den betrachteten Zufallsvariablen und werden als konstant über den Betrachtungszeitraum angesehen. Nicht abgebildet werden in der Realwelt zu beobachtende Veränderungen von Korrelationen sowie nicht-lineare Zusammenhänge zwischen Zufallsvariablen.

▪ Während eine Aggregation für Ertrags- und Risikogrößen für alle zugrunde liegenden Verteilungen der unsicheren Barwerte von Einzelgeschäften möglich ist, setzen Wertbeiträge im Sinne von Sicherheitsäquivalenten normalverteilte Barwerte der Einzelgeschäfte voraus. Eine derartige Modellierung erscheint für Einzelgeschäfte, die hauptsächlich Markt- und Kreditrisiken aufweisen, im Normalfall gut bis sehr gut geeignet, i. d. R. jedoch nicht für operationelle Risiken.

Es besteht weiterer Forschungsbedarf insb.

▪ in der Evaluation und (Weiter-)Entwicklung statistischer Schätzverfahren zur Bestimmung von Korrelationen und Standardabweichungen,
▪ in der Formulierung der spezifischen Anforderungen an die Datenmodellierung des 4R-Kennzahlensystems und der zu stellenden Konsistenzanforderungen sowie in der Umsetzung in relationalen, integrierten Ertrags- und Risikodatenbanken und
▪ in der Untersuchung, welchen Beitrag bspw. Gridtechnologien bei derartigen komplexen, aber in Teilprobleme zerlegbaren Problemstellungen leisten können (vgl. [BFHH05]).

Aus Sicht der WI-IF-Forschungskonzeption [BuKu03] stellt die Entwicklung einer 4R-Informationsarchitektur zum Aufbau derartiger Planungs- und Kontrollsysteme eine große Herausforderung insb. für die Wirtschaftsinformatik als interdisziplinäre Wissenschaft dar.

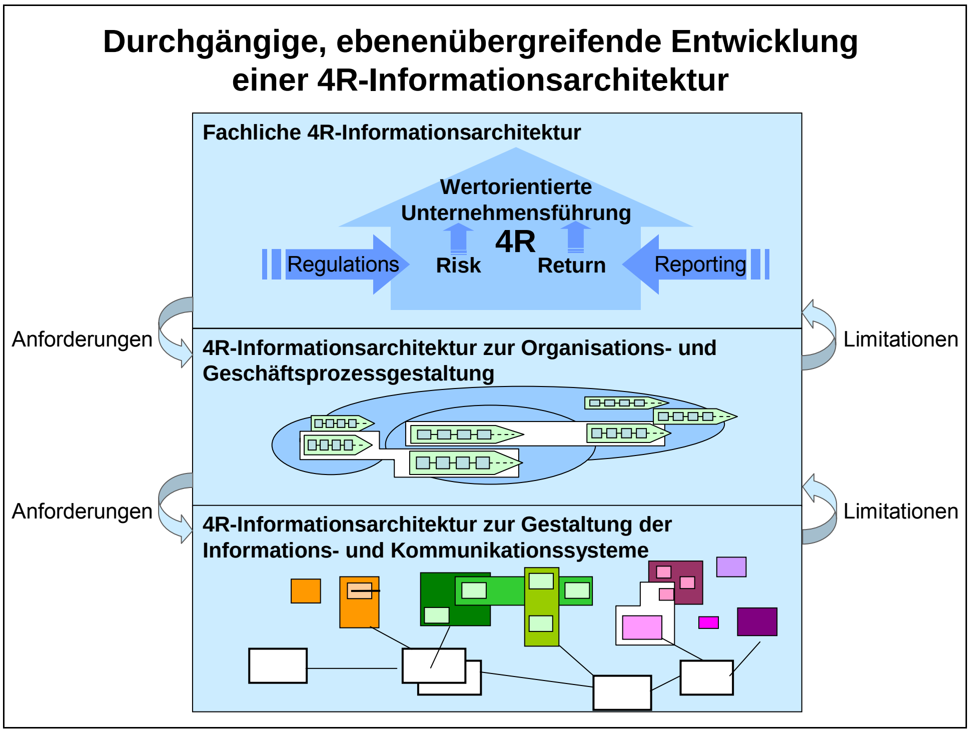

Bild 7 Ebenen der 4R-Informationsarchitektur

Bild 7 stellt die 4R-Informationsarchitektur vor, die sich in drei aufeinander aufbauende Ebenen gliedert (vgl. bzgl. der Wahl der betrachteten Ebenen bspw. [ÖsWi00]).

Generell lässt sich dazu festhalten, dass die bisherige Forschung in der Betriebswirtschaftslehre, der Wirtschaftsinformatik und der angewandten Informatik zwar für die einzelnen Teilbereiche vielfältige Methoden und Konzepte entwickelt hat, jedoch interdisziplinäre Methoden und Konzepten noch weitgehend fehlen. Daher sind durch die Wirtschaftsinformatik Methoden und Konzepte zu entwickeln, die in der Lage sind, ausgehend von finanzwirtschaftlichen Anforderungen solche an die Organisations- und Prozessgestaltung sowie an die Gestaltung von Informations- und Kommunikationssystemen unternehmensweit durchgängig abzuleiten und abzubilden. Dabei ist bereits bei der Definition der finanzwirtschaftlichen Anforderungen und den Lösungsansätzen zu prüfen, inwieweit diese im Rahmen der Limitationen der darunter liegenden Ebenen überhaupt umsetzbar sind bzw. welche Erweiterung und Weiterentwicklungen bisheriger Ansätze dieser Ebenen erforderlich machen.

Im Rahmen des 4R-Kennzahlensystems wurde ein wertadditiver Ansatz zur Risikomodellierung gewählt, da dieser eine spätere Umsetzung im Rahmen integrierter Ertrags- und Risikodatenbanken wesentlich erleichtert bzw. überhaupt erst die konsistente Aggregation von Ertrags- und Risikogrößen auf beliebigen Aggregationsstufen in beliebigen Dimensionen ermöglicht. Die Untersuchung derartiger, fachkonzeptioneller Grundlagen einer 4R-Informationsarchitektur ist eine wichtige Aufgabe der Wirtschaftsinformatik. Nur wenn sie derartige fachkonzeptionelle Grundlagen nicht scheut, wird sie in der Lage sein, Standardsoftwarehersteller, wie bspw. die SAP AG, beim Aufbau integrierter Planungs- und Kontrollsysteme zu unterstützen.

Das 4R-Kennzahlensystem stellt einen Lösungsansatz für eine unternehmensweit konsistente Datengrundlage mit einheitlichen Ertrags- und Risikogrößen dar. Dieser Beitrag ist somit ein erster Baustein zur Schaffung einer 4R-Informationsarchitektur, welche den Aufbau integrierter, mehrzweckfähiger Planungs- und Kontrollsysteme im Sinne der Vision des Integrated Enterprise Balancing auf den Weg bringen soll.

Literatur

[BaKu00] Ballwieser, W.; Kuhner, C.: Risk Adjusted Return On Capital – ein geeignetes Instrument zur Steuerung, Kontrolle und Kapitalmarktkommunikation? In Riekeberg, M./Stenke, K.: Banking 2000, Perspektiven und Projekte, Hermann Meyer zu Selhausen zum 60. Geburtstag, Gabler, Wiesbaden, S.367-381.

[BuKu03] Buhl, H. U.; Kundisch, D.: Transformation von Finanzintermediären durch IT. In: Wirtschaftsinformatik, 45, 5, 2003, S.503-508.

[BFHH05] Buhl, H. U.; Fridgen, G.; Hackenbroch, W.; Henneberger, M.: An Economic Model for the Allocation of Grid Resources to Risk/Return Management, Discussion Paper WI-153, Lehrstuhl WI-IF, Universität Augsburg, überarbeitete Fassung vom Juli 2005, zur Begutachtung eingereicht bei Management Science, abrufbar unter http://www.wi-if.de/Publikationen/.

[CoWe88] Copeland, T.E.; Weston, J.E.: Financial Theory and Corporate Policy. 3. Auflage, Addison-Wesley, New York, 1988.

[FrHa03] Franke, G.; Hax, H.: Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt. 5. Auflage, Springer, Berlin et al., 2003.

[Host96] Hostettler, S.: Das Konzept des Economic Value Added (EVA) - Maßstab für finanzielle Performance und Bewertungsinstrument im Zeichen des Shareholder Value; Darstellung und Anwendung auf Schweizer Aktiengesellschaften. Dissertation, St. Gallen, 1996.

[Huth03] Huther, A.: Integriertes Chancen- und Risikomanagement. Gabler, Wiesbaden, 2003.

[IBM03] IBM Business Consulting Services: CFO Survey: Current state and future direction. Umfrage unter weltweit ca. 450 Finanzvorständen, durchgeführt in Kooperation mit dem Lehrstuhl WI-IF an der Universität Augsburg, 2003.

[Kemp01] Kemper, A.: Datenbanksysteme: Eine Einführung, 4.Auflage, Oldenbourg, München, 2001.

[Mert04] Mertens, P.: Integrierte Informationsverarbeitung 1: Operative Systeme in der Industrie. 14. Auflage, Gabler, Wiesbaden, 2004.

[ÖsWi00] Österle, H.; Winter, R.: Business Engineering, Springer, Berlin et al., 2000.

[SaBr99] Saitz, B.; Braun, F.(Hrsg.): Das Kontroll- und Transparenzgesetz: Herausforderungen und Chancen für das Risikomanagement. Gabler, Wiesbaden, 1999.

[Schn67] Schneeweiß, H.: Entscheidungskriterien bei Risiko. Springer, Berlin et al., 1967.

[SOA02] One hundred seventh congress of the United States of America: Sarbanes-Oxley Act of 2002. Abgerufen unter http://www.sarbanes-oxley.com am 08-03-2005.

Anhang:

Überblick:

Anhang 1: Formale Ergänzungen zu den Annahmen

- ***Zu Annahme A1: Ausführlichere Definition unsicherer Zahlungsströme und Barwerte der Einzelgeschäfte i:***

  Zum Zeitpunkt t=0 *besitze eine Unternehmung* I (mit $I \in \aleph$ und $I \geq 2$) *laufende Einzelgeschäfte, welche dem Portfolio* U *angehören, das alle Einzelgeschäfte der Unternehmung zusammenfasst.*

  Für jedes Einzelgeschäft i (mit $i \in \{1, I\}$) *lässt sich der unsichere Zahlungsstrom* $\vec{\tilde{Z}}^i$ *bei einer Laufzeit von* T^i *Perioden* (mit $T^i \in \aleph$) *anhand der unsicheren Zahlungsüberschüsse* $\tilde{z}_t^i$ *zu den Zeitpunkten* t=0 *bis* $t=T^i$ *in der folgenden Form angeben:* $\vec{\tilde{Z}}^i = (\tilde{z}_0^i, \tilde{z}_1^i, \tilde{z}_2^i, .., \tilde{z}_{T^i}^i)$. *Der unsichere Barwert* $\tilde{B}W(\vec{\tilde{Z}}^i)$ *eines Zahlungsstroms* $\vec{\tilde{Z}}^i$ *berechnet sich durch die Diskontierung der Zahlungsüberschüsse* $\tilde{z}_t^i$ *zum Zeitpunkt* t=0 *mit dem risikolosen Zinssatz* r_p^i (*jeweils für die Perioden* $p \in \aleph$ *mit* $1 \leq p \leq T^i$ *zwischen den Zeitpunkten* t=p-1 *und* t=p)*:*

  $$\tilde{B}W(\vec{\tilde{Z}}^i) = \tilde{z}_0^i + \sum_{t=1}^{T^i} \frac{\tilde{z}_t^i}{\prod_{p=1}^{t}(1+r_p^i)}$$

  Die Dichtefunktionen $\varphi_t^i(\tilde{z}_t^i)$ *seien jeweils für alle unsicheren Zahlungsüberschüsse* $\tilde{z}_t^i$ *bekannt.*

  Ebenso seien die jeweiligen Dichtefunktionen $\varphi_{BW}^i(\tilde{B}W(\vec{\tilde{Z}}^i))$ *der Barwerte der Einzelgeschäfte i bekannt bzw. können durch Faltung der Verteilungen der zugehörigen Zahlungsüberschüsse* $\tilde{z}_t^i$ *unter Berücksichtigung der Korrelationen zwischen den Zahlungsüberschüssen (vgl. [BaDK04][i]) ermittelt werden. Der risikolose Zinssatz* r_p^i *sei anhand von Forward-Rates bekannt.*

---

[i] [BaDK04] Bamberg, G.; Dorfleitner, G.; Krapp, M.: Zur Bewertung risikobehafteter Zahlungsströme mit intertemporaler Abhängigkeitsstruktur. In: BFuP, 56. Jg., 2004, Heft 2, S. 101-199.

- ***Zu Annahme A2: Ergänzung zur Definition der Ertragsgröße*** E^i ***:***

  Es gilt:

$$E^i = V_E(\tilde{\vec{Z}}^i) = E(\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^i)) = \int_{\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^i)=-\infty}^{\infty} \varphi^i_{BW}(\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^i)) \cdot \widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^i).$$

mit:

$V_E(\tilde{\vec{Z}}^i)$: Bewertungsfunktion zur Bestimmung des Erwartungswerts eines unsicheren Barwerts des Zahlungsstroms $\tilde{\vec{Z}}^i$ als Abbildung des Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega(\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^i)),\ F(\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^i)),\ \varphi^i_{BW}(\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^i)) \rightarrow \Re)$.

Die (barwertige) Ertragsgröße $E^i \in \Re$ ist skalar und wird in Geldeinheiten ausgedrückt.

- ***Zu Annahme A3: Ergänzung zur Definition der Risikogröße*** R^i ***:***

  Es gilt:

$$R^i = V_R(\tilde{\vec{Z}}^i) = Cov_{i,U} = Cov(\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^i), \widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^U)) = \rho_{i,U} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_U$$

mit:

$V_R(\tilde{\vec{Z}}^i)$: Bewertungsfunktion zur Bestimmung der Kovarianz zwischen dem Barwert $\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^i)$ und dem Barwert $\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^U)$ des Portfolios U der Unternehmung als Abbildung des Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega(\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^i)),\ F(\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^i)),\ \varphi^i_{BW}(\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^i))) \rightarrow \Re$.

$Cov_{i,U}$: Kovarianz zwischen dem Barwert $\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^i)$ und dem Barwert $\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^U)$, jeweils in t=0.

$\rho_{i,U}$: Korrelation zwischen dem Barwert $\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^i)$ und dem Barwert $\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^U)$, jeweils in t=0.

σ_i: Standardabweichung des Barwerts $\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^i)$ in t=0.

σ_U: Standardabweichung des Barwerts $\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^U)$ in t=0.

Die (barwertige) Risikogröße $R^i \in \Re$ ist skalar und wird in Geldeinheiten ausgedrückt und kann durch die Berücksichtigung von Korrelationen jeden Wert zwischen $(-\infty, \infty)$ annehmen.

- ***Zu Annahme A4: Ergänzung zur Definition der hierarchischen Baumstruktur***

  Um eine trennscharfe Aggregation von den Einzelgeschäften über Teilportfolios auf unterschiedlichen Aggregationsstufen bis hin zum Portfolio U *der Unternehmung zu ermöglichen, wird jeder Knoten* x(A_k+1) *der Aggregationsstufe* A_k+1 *genau einem Knoten* y(A_k) *der nächst höheren Aggregationsstufe* A_k ($\forall$ k$\in${1, n-1}) *eindeutig (durch die Kanten in der hierarchischen Baumstruktur) zugeordnet: So sind die Einzelgeschäfte* i (mit i$\subseteq$U) *in einem bestimmten Teilportfolio* j(A_n-1) *der Unternehmung auf der nächst höheren Aggregationsstufe* A_n-1 *enthalten, d.h. es gilt* i(A_n)$\subseteq$j(A_n-1). *Die Einzelgeschäfte* i *werden in der hierarchischen Baumstruktur über weiter aggregierte Teilportfolios höherer Aggregationsstufen bis hin zum Portfolio* U *der Unternehmung zusammengefasst und es gilt* i(A_n)$\subseteq$j(A_n-1)$\subseteq\ldots\subseteq$U(A_1).

  Anmerkung: Durch die eindeutige Zuordnung über die Kanten einer hierarchischen Baumstruktur (in Form eines balancierten Wurzelbaums) sind die durch die Knoten x(A_k) auf den Aggregationsstufen A_k (mit k$\in${2, n}) repräsentierten Teilportfolios jeweils paarweise disjunkt. Es gilt für jeweils zwei Teilportfolios x(A_k) und y(A_k) einer bestimmten Aggregationsstufe A_k, dass deren Schnittmenge leer ist.

- ***Zu Annahme A5: Ergänzung zur Definition der multidimensionalen, hierarchischen Baumstruktur***

  Jedes Einzelgeschäft i *wird in allen betrachteten Dimensionen* Dim_d *durch jeweils genau eine Kante genau einem Teilportfolio* x(A_sDim_d, Dim_d) *auf der (zweit niedrigsten) Aggregationsstufe* A_sDim_d *zugeordnet (mit* sDim_d *für die in jeder Dimension spezifische - in der Gesamtbetrachtung der multidimensionalen, hierarchischen Baumstruktur - zweit niedrigste Aggregationsstufe). Die Zuordnung der Einzelgeschäfte erfolgt vollständig und eindeutig für alle Dimensionen. Für die niedrigste Aggregationsstufe* A_n *der Einzelgeschäfte gilt:* $n \geq \max_{Dim\_d}(sDim\_d) + 1$.

  Anmerkung: Durch die eindeutige Zuordnung über die Kanten einer multidimensionalen, hierarchischen Baumstruktur sind die durch die Knoten x(A_k, Dim_d) auf den Aggregationsstufen A_k (mit k$\in${2, n-1}) in einer bestimmten Dimension Dim_d repräsentierten Teilportfolios jeweils paarweise disjunkt. Es gilt für jeweils zwei Teilportfolios x(A_k, Dim_d) und y(A_k, Dim_d) auf einer bestimmten Aggregationsstufe A_k einer bestimmten Dimension Dim_d, dass deren Schnittmenge leer ist.

Anhang 2: Wertadditivität von Ertragsgrößen

Ertragsgrößen E^i als Bewertungsfunktion von unsicheren Zahlungsströmen sind wertadditiv, wenn eine Bewertungsfunktion $E^i = V_E(\vec{\tilde{Z}}^i)$ existiert, bei deren Anwendung für je zwei Zahlungsströme $\vec{\tilde{Z}}^i$ und $\vec{\tilde{Z}}^j$ (mit i, j $\in$ {1, I}, i$\neq$j) gilt: $E^{i+j} = V_E(\vec{\tilde{Z}}^{i+j}) = V_E(\vec{\tilde{Z}}^i) + V_E(\vec{\tilde{Z}}^j) = E^i + E^j$

Beweis:

Betrachtet werden jeweils zwei beliebige Zahlungsströme $\vec{\tilde{Z}}^i$ und $\vec{\tilde{Z}}^j$ (mit i, j $\in$ {1, I}, i$\neq$j). Wertadditivität gilt für deren Ertragsbewertung E^i und E^j, wenn für die Diskontierung der jeweiligen Zahlungsüberschüsse $\tilde{z}_t^i$ einheitliche, risikofreie Zinssätze $r_p = r_p^i \forall i$ angewendet werden (erweiterter Beweis nach [FrHa03]):

$$E^{i+j} = V_E(\vec{\tilde{Z}}^{i+j}) = E(\tilde{z}_0^{i+j}) + \sum_{t=1}^{\max(T^i,T^j)} \frac{E(\tilde{z}_t^{i+j})}{\prod_{p=1}^{t}(1+r_p)} = E(\tilde{z}_0^i) + \sum_{t=1}^{T^i} \frac{E(\tilde{z}_t^i)}{\prod_{p=1}^{t}(1+r_p)} + E(\tilde{z}_0^j) + \sum_{t=1}^{T^j} \frac{E(\tilde{z}_t^j)}{\prod_{p=1}^{t}(1+r_p)} =$$

$$= V_E(\vec{\tilde{Z}}^i) + V_E(\vec{\tilde{Z}}^j) = E^i + E^j$$

mit: $E(\tilde{z}_t^i)$: Erwartungswert des (unsicheren) Zahlungsüberschusses $\tilde{z}_t^i$ zum Zeitpunkt t.

Anhang 3: Wertadditivität von Risikogrößen

Anhang 3-1: Wertadditivität von Risikogrößen bei Anwendung des Varianz-Kovarianz-Ansatzes

Risikogrößen als Bewertungsfunktion von unsicheren Zahlungsströmen sind wertadditiv, wenn eine Bewertungsfunktion $R^i = V_R(\tilde{\vec{Z}}^i)$ existiert, bei deren Anwendung für je zwei Zahlungsströme $\tilde{\vec{Z}}^i$ und $\tilde{\vec{Z}}^j$ (mit i, j $\in$ {1, I}, i$\neq$j) gilt:

$$R^{i+j} = V_R(\tilde{\vec{Z}}^{i+j}) = V_R(\tilde{\vec{Z}}^i) + V_R(\tilde{\vec{Z}}^j) = R^i + R^j \text{ .}$$

Beweis:

Es gilt für jeweils zwei beliebige Zahlungsströme $\tilde{\vec{Z}}^i$ und $\tilde{\vec{Z}}^j$ (mit i, j $\in$ {1, I}, i$\neq$j) und deren Risikobewertung durch R^i und R^j anhand der Kovarianzen zwischen den Einzelgeschäften i bzw. j und dem Portfolio U der Unternehmung Wertadditivität (vgl. [CoWe88]):

$$R^{i+j} = V_R(\tilde{\vec{Z}}^{i+j}) = \sum_m Cov_{i+j,m} = \sum_m (Cov_{i,m} + Cov_{j,m}) = \sum_m Cov_{i,m} + \sum_m Cov_{j,m} =$$

$$= Cov_{i,U} + Cov_{j,U} = V_R(\tilde{\vec{Z}}^i) + V_R(\tilde{\vec{Z}}^j) = R^i + R^j$$

mit:

i, j $\in$ U: Einzelgeschäfte, welche dem Portfolio U der Unternehmung angehören.

m: Laufvariable (hier: über alle Einzelgeschäfte der Unternehmung).

$\tilde{\vec{Z}}^{i+j}$: Aggregierter, unsicherer Zahlungsstrom der Einzelgeschäfte i und j.

Dieser Zusammenhang lässt sich für die Zusammenhänge von zwei beliebigen Aggregationsstufen (wie z.B. Geschäftsbereiche und Unternehmung bzw. Einzelgeschäfte und Geschäftsbereiche) anwenden und gilt unabhängig von der zugrunde liegenden Verteilung der betrachteten Zufallsvariablen.

Anhang 3-2: Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen Korrelationen innerhalb einer hierarchischen Baumstruktur

Im Folgenden wird dargestellt, welche Zusammenhänge für die Korrelationen zwischen den unsicheren Barwerten innerhalb einer hierarchischen Baumstruktur bestehen und welche Konsistenzanforderungen an die verwendeten Größen und Parameter eines 4R-Kennzahlensystem zu stellen sind. Zur Vereinfachung der Beweisführung werde die folgende zusätzliche Annahme A7 getroffen:

Für die Standardabweichungen der Barwerte der Zahlungsströme der Teilportfolios x(A_k) *auf den Aggregationsstufen* A_k *(mit 1<k≤n) gilt:* $\sigma_{x(A\_k)} > 0 \ \ \forall x(A\_k) \text{ mit } 1 < k \leq n$.

Durch die Division mit $\sigma_{j(A\_n\text{-}1)} > 0$ (nach A7), lässt sich folgender, vereinfachter Zusammenhang für zwei Aggregationsstufen A_n-1 und A_n darstellen (mit n≥2):

$$\sigma_{j(A\_n-1)} = \sum_{i(A\_n) \subseteq j(A\_n-1)} \left(\rho_{(i(A\_n),\ j(A\_n-1)} \cdot \sigma_{i(A\_n)}\right)$$

mit:

j(A_n-1): Teilportfolio j auf der Aggregationsstufe A_n-1.

i(A_n): Einzelgeschäft i auf der Aggregationsstufe A_n.

i(A_n)⊆j(A_n-1): Die Einzelgeschäfte i(A_n) sind im Teilportfolio j(A_n-1) auf der nächst höheren Aggregationsstufe A_n-1 enthalten.

$\sigma_{j(A\_n-1)}$: Standardabweichung des Barwerts des Zahlungsstroms des Teilportfolios j(A_n-1).

$\sigma_{i(A\_n)}$: Standardabweichung des Barwerts des Zahlungsstroms des Einzelgeschäfts i(A_n).

$\rho_{i(A\_n),\ j(A\_n-1)}$: Korrelation zwischen dem Barwert des Einzelgeschäfts i(A_n) und dem Barwert des Teilportfolios j(A_n-1).

Bei Betrachtung von drei Aggregationsstufen und Division mit $\sigma_{k(A\_n\text{-}2)} > 0$ (mit n≥3) gilt (nach A7):

$$\begin{aligned}\sigma_{k(A\_n-2)} &= \sum_{j(A\_n-1) \subseteq k(A\_n-2)} \rho_{j(A\_n-1),k(A\_n-2)} \cdot \sigma_{j(A\_n-1)} = \\ &= \sum_{j(A\_n-1) \subseteq k(A\_n-2)} \rho_{j(A\_n-1),k(A\_n-2)} \cdot \sum_{i(A\_n) \subseteq j(A\_n-1)} \left(\rho_{i(A\_n),j(A\_n-1)} \cdot \sigma_{i(A\_n)}\right) = \\ &= \sum_{j(A\_n-1) \subseteq k(A\_n-2)} \ \sum_{i(A\_n) \subseteq j(A\_n-1)} \left(\rho_{j(A\_n-1),k(A\_n-2)} \cdot \rho_{i(A\_n),j(A\_n-1)} \cdot \sigma_{i(A\_n)}\right)\end{aligned}$$

mit (siehe auch oben):

k(A_n-2): Portfolio k(A_n-2) auf der Aggregationsstufe A_n-2

j(A_n-1)⊆k(A_n-2): Das Teilportfolio j(A_n-1) ist dem Portfolio k(A_n-2) zugeordnet, d.h. die Einzelgeschäfte, die im Teilportfolio j auf der Aggregationsstufe A_n-1 enthalten sind, sind eine Teilmenge der Einzelgeschäfte, die im Portfolio k auf der nächst höheren Aggregationsstufe A_n-2 enthalten sind.

$\sigma_{k(A\_n-2)}$: Standardabweichung des Barwerts des Zahlungsstroms des Portfolios k(A_n-2)

$\rho_{j(A\_n-1),\ k(A\_n-2)}$: Korrelation zwischen dem Barwert des Teilportfolios j(A_n-1) und dem Barwert des Portfolios k(A_n-2).

Schließlich gilt bei Betrachtung von n Aggregationsstufen (mit n $\in$ ℵ und n≥2) gilt (Beweis durch Induktion möglich) und Division mit $\sigma_{U(A\_1)} > 0$ (nach A7):

$$\sigma_{U(A\_1)} = \sum_{i(A\_n)} \rho_{i(A\_n),U(A\_1)} \cdot \sigma_{i(A\_n)} = \underbrace{\sum_{v(A\_2)\subseteq U(A\_1)} .. \sum_{i(A\_n)\subseteq j(A\_n-1)}}_{\text{n-1 Aggregationssummen für die Teilportfolios der Aggregationsstufen von A\_1 bis A\_n}} (\underbrace{(\rho_{i(A\_n),j(A\_n-1)} \cdot .. \cdot \rho_{v(A\_2),U(A\_1)})}_{\text{n-1 Faktoren für die Korrelationen zwischen den Teilportfolios und Portfolios auf jeweils benachbarten Aggregationsstufen, deren Knoten durch jeweils genau eine Kante verbunden sind.}} \cdot \sigma_{i(A\_n)})$$

Anhang 3-3: Zusammenhang zwischen der Standardabweichung des Portfolios U der Unternehmung, der beliebiger Teilportfolios x(A_k, Dim_d) einer bestimmten Dimension Dim_d sowie der diesen Teilportfolios zugeordneten Einzelgeschäften i

Die Einzelgeschäfte i werden für die jeweils betrachteten Dimensionen Dim_d jeweils (über beliebig viele Aggregationsstufen einer Dimension) jeweils genau einem Teilportfolio x(A_k, Dim_d) auf der Aggregationsstufen A_k zugeordnet. Die Standardabweichung des Teilportfolios x(A_k, Dim_d) lässt sich durch die Summe des Produkts aus der Korrelation zwischen dem jeweiligen Einzelgeschäft i(A_n) (mit i(A_n)$\subseteq$x(A_k, Dim_d)) und dem Teilportfolio x(A_k, Dim_d) sowie aus der Standardabweichung der Einzelgeschäfte i(A_n) bestimmen:

$$\sigma_{x(A\_k,\ Dim\_d)} = \sum_{i(A\_n)\subseteq x(A\_k, Dim\_d)} (\rho_{i(A\_n), x(A\_k, Dim\_d)} \cdot \sigma_{i(A\_n)})$$

mit:

$\sigma_{x(A\_k,\ Dim\_d)}$: Standardabweichung des Barwerts des Zahlungsstroms des Teilportfolios x(A_k, Dim_d).

$\sigma_{i(A\_n)}$: Standardabweichung des Barwerts des Zahlungsstroms des Einzelgeschäfts i(A_n).

$\rho_{i,\ x(A\_k, Dim\_d)}$: Korrelation zwischen dem Barwert des Einzelgeschäfts i und dem Barwert des Teilportfolios x(A_k, Dim_d) in der Dimension Dim_d.

Dem Portfolio U der Unternehmung sind - ggf. indirekt über Zwischenaggregationsstufen - die Portfolios x(A_k, Dim_d) zugeordnet. Für die Standardabweichung des Portfolios U der Unternehmung gilt:

$$\sigma_{U(A\_1)} = \sum_{x(A\_k,\ Dim\_d)} \rho_{x(A\_k,\ Dim\_d), U(A\_1)} \cdot \sigma_{x(A\_k,\ Dim\_d)}$$

Bei Betrachtung zwei beliebiger Dimensionen Dim_e und Dim_f gilt daher für die Standardabweichung des Portfolios U der Unternehmung:

$$\sigma_{U(A\_1)} = \sum_{x(A\_k,\ Dim\_e)} \rho_{x(A\_k,\ Dim\_e), U(A\_1)} \cdot \sigma_{x(A\_k,\ Dim\_e)} =$$

$$= \sum_{x(A\_k,\ Dim\_e) \subseteq U(A\_1)} \rho_{x(A\_k,\ Dim\_e), U(A\_1)} \cdot \sum_{i(A\_n) \subseteq x(A\_k,\ Dim\_e)} \rho_{i(A\_n) \subseteq x(A\_k,\ Dim\_e)} \cdot \sigma_{i(A\_n)} =$$

$$= \sum_{x(A\_k,\ Dim\_e) \subseteq U(A\_1)} \sum_{i(A\_n) \subseteq x(A\_k,\ Dim\_e)} \rho_{x(A\_k,\ Dim\_e), U(A\_1)} \cdot \rho_{i(A\_n) \subseteq x(A\_k,\ Dim\_e)} \cdot \sigma_{i(A\_n)} =$$

$$= \sum_{y(A\_o,\ Dim\_f)} \rho_{y(A\_o,\ Dim\_f), U(A\_1)} \cdot \sigma_{y(A\_o,\ Dim\_f)} =$$

$$= \sum_{y(A\_o,\ Dim\_f) \subseteq U(A\_1)} \sum_{i(A\_n) \subseteq y(A\_o,\ Dim\_f)} \rho_{y(A\_o,\ Dim\_f), U(A\_1)} \cdot \rho_{i(A\_n) \subseteq y(A\_o,\ Dim\_f)} \cdot \sigma_{i(A\_n)} =$$

$$= \sum_{i(A\_n)} \rho_{i(A\_n), U(A\_1)} \cdot \sigma_{i(A\_n)}$$

mit:

$i \subseteq x(A\_k, Dim\_e)$ und $i \subseteq y(A\_o, Dim\_f)$; $e \neq f$; $e,f \in \aleph$; $1<k \leq sDim\_e<n$; $1<o \leq sDim\_f<n$.

Dem Portfolio U der Unternehmung sind die Teilportfolios (hier: x(A_k, Dim_e) und y(A_o, Dim_f)) in einer jeweils bestimmten Aggregationsstufe einer Dimension zugeordnet.

Anhang 4: Wertadditivität von Wertbeiträgen

Wertbeiträge W^i_{BW*} als Bewertungsfunktion von unsicheren Zahlungsströmen sind wertadditiv, wenn eine Bewertungsfunktion $W^i_{BW*} = V_{Int,BW*}(E^i_{BW*}, R^i_{BW*})$ existiert, bei deren Anwendung für je zwei Zahlungsströme $\tilde{\vec{Z}}^i$ und $\tilde{\vec{Z}}^j$ (mit $i, j \in \{1, I\}$, $i \neq j$) gilt:

$$W^{i+j}_{BW*} = V_{Int,BW*}(E^{i+j}_{BW*}, R^{i+j}_{BW*}) = V_{Int,BW*}(E^i_{BW*}, R^i_{BW*}) + V_{Int,BW*}(E^j_{BW*}, R^j_{BW*}) = W^i_{BW*} + W^j_{BW*}$$

Beweis:

Wertbeiträge - zur Verknüpfung der Ertrags- und Risikogrößen - sind wertadditiv, sofern unternehmensweit einheitliche, konstante Parameter a und b mit $a = a^i = a^U \ \forall i$ und $b = b^i = b^U \forall i$ in der Integrationsfunktion $V_{Int,BW*}(E^i_{BW*}, R^i_{BW*})$ für alle Teilportfolios x(A_k, Dim_d) angewendet werden:

$$W^U_{BW*} = V_{Int,BW*}(E^U_{BW*}, R^U_{BW*}) = a^U \cdot E^U_{BW*} - b^U \cdot R^U_{BW*} = a \cdot \sum_i E^i_{BW*} - b \cdot \sum_i R^i_{BW*} =$$

$$= \sum_i (a^i \cdot E^i_{BW*} - b^i \cdot R^i_{BW*}) = \sum_i V_{Int,BW*}(E^i_{BW*}, R^i_{BW*}) = \sum_i W^i_{BW*} \qquad \text{mit } a = a^i = a^U \text{ und } b = b^i = b^U \ \forall i$$

Anhang 5: Formalisierung der Konsistenzanforderungen K2 und K3

- ***Zu Konsistenzanforderung K2:***

K2a): Die Korrelation $\rho_{i(A\_n),U(A\_1)}$ zwischen einem Einzelgeschäft i(A_n) und dem Portfolio der Unternehmung U(A_1) entspricht dem Produkt der n-1 Korrelationen zwischen den Teilportfolios und den Portfolios auf jeweils benachbarten Aggregationsstufen, deren Knoten durch jeweils genau eine Kante verbunden sind:

$$\rho_{i(A\_n),U(A\_1)} = \underbrace{\rho_{i(A\_n),\,j(A\_n\text{-}1)} \cdot \ldots \cdot \rho_{v(A\_2),\,U(A\_1)}}_{\substack{\text{n-1 Faktoren für die Korrelationen zwischen den Teilportfolios und} \\ \text{den Portfolios auf jeweils benachbarten Aggregationsstufen}}}$$

K2b): Für die Korrelationen zwischen den Teilportfolios und den Portfolios unterschiedlicher Aggregationsstufen 1≤m<k<n muss gelten, dass die Korrelation $\rho_{x(A\_k+1),\,y(A\_m)}$ zwischen einem Teilportfolio x(A_k+1) und einem Portfolio y(A_m) dem Produkt der Korrelationen zwischen den Teilportfolios auf den dazwischen liegenden Aggregationsstufen entspricht, deren Knoten durch jeweils genau eine Kante verbunden sind:

$$\rho_{x(A\_k+1),\,y(A\_m)} = \rho_{x(A\_k+1),\,j(A\_k)} \cdot \ldots \cdot \rho_{l(A\_m+1),\,y(A\_m)}$$
$$\text{mit } x(A\_k+1) \subseteq j(A\_k) \subseteq .. \subseteq l(A\_m+1) \subseteq y(A\_m)$$

K2c): Für die Standardabweichung $\sigma_{y(A\_k)}$ eines Portfolios y(A_k) auf einer beliebigen Aggregationsstufe A_k (mit 1≤k<n) muss gelten, dass diese der Summe aus den Produkten der Standardabweichungen $\sigma_{x(A\_k+1)}$ der im Portfolio y(A_k) enthaltenen Teilportfolios x(A_k+1) und der jeweiligen Korrelationen $\rho_{x(A\_k+1),\,y(A\_k)}$ zwischen einem Teilportfolio x(A_k+1) und dem Portfolio y(A_k) entspricht:

$$\sigma_{y(A\_k)} = \sum_{x(A\_k+1) \subseteq y(A\_k)} \left(\rho_{x(A\_k+1),\,y(A\_k)} \cdot \sigma_{x(A\_k+1)}\right)$$

- ***Zu Konsistenzanforderung K3:***

K3a): Unabhängig von der betrachteten Dimension sind folgende Parameter einheitlich zu schätzen, da sie zugleich für alle betrachteten Dimensionen relevant sind:

- die Standardabweichungen σ_i der Einzelgeschäfte i,
- die Standardabweichung σ_U des Portfolios U der Unternehmung sowie
- die Korrelationen $\rho_{i,U}$ zwischen den Einzelgeschäften i und dem Portfolio U der Unternehmung.

K3b): Bei Betrachtung beliebiger Dimensionen Dim_e und Dim_f gilt: In jeder betrachteten Dimension muss die Korrelation $\rho_{i,U}$ zwischen einem Einzelgeschäft i und dem Portfolio U der Unternehmung jeweils dem Produkt der Korrelationen zwischen den Teilportfolios und den Portfolios auf jeweils benachbarten Aggregationsstufen einer Dimension entsprechen, deren Knoten durch jeweils genau eine Kante verbunden sind:

$$\rho_{i,U} = \rho_{i,\,x(A\_k,\,Dim\_e)} \cdot \rho_{x(A\_k,\,Dim\_e),\,U} = \rho_{i,\,y(A\_o,\,Dim\_f)} \cdot \rho_{y(A\_o,\,Dim\_f),\,U}$$
$$\forall i \forall x(A\_k, Dim\_e) \forall y(A\_o, Dim\_f)$$

mit $i \subseteq x(A\_k, Dim\_e)$, $i \subseteq y(A\_o, Dim\_f)$; $e \neq f$; $e,f \in \aleph$; $1<k\leq sDim\_e<n$; $1<o\leq sDim\_f<n$; $x(A\_k, Dim\_e) \subseteq U$ und $y(A\_o, Dim\_f) \subseteq U$.

K3c): Für die Standardabweichung $\sigma_{y(A\_k,\,Dim\_d)}$ eines Portfolios y(A_k, Dim_d) auf einer beliebigen Aggregationsstufe A_k (mit 1≤k<n) einer beliebigen Dimension Dim_d muss gelten, dass diese der Summe aus den Produkte der Standardabweichungen $\sigma_{x(A\_k+1,\,Dim\_d)}$ der in y(A_k, Dim_d) enthaltenen Teilportfolios x(A_k+1, Dim_d) mit den jeweiligen Korrelationen $\rho_{x(A\_k+1,Dim\_d),\,y(A\_k,\,Dim\_d)}$ zwischen einem Teilportfolio x(A_k+1, Dim_d) und dem Portfolio y(A_k, Dim_d) entspricht:

$$\sigma_{y(A\_k,\,Dim\_d)} = \sum_{x(A\_k+1,\,Dim\_d) \subseteq y(A\_k,\,Dim\_d)} \left(\rho_{x(A\_k+1,\,Dim\_d),\,y(A\_k,\,Dim\_d)} \cdot \sigma_{x(A\_k+1,\,Dim\_d)}\right)$$

Anhang 6: Berechnungen zum Beispiel in Bild 3, 5 und 6

Anhang 6-1: Berechnungen zum Beispiel in Bild 3 (Verteilungsfreie, eindimensionale Aggregation von Ertrags- bzw. Risikogrößen in einer hierarchischen Baumstruktur)

Eine Unternehmung besitze insgesamt fünf Einzelgeschäfte i (mit $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$), deren Ertrags- bzw. Risikogrößen nach den zwei Produkten P und Q auf n=3 Aggregationsstufen (gemäß A1-A4) zum Gesamtertrag und Gesamtrisiko der Unternehmung zusammengefasst werden. Auf der höchsten Aggregationsstufe A_1 ist U(A_1) das Portfolio der Unternehmung, auf der mittleren Aggregationsstufe A_2 seien P(A_2) und Q(A_2) die Teilportfolios zweier unterschiedlicher Produkte der Unternehmung und auf der niedrigsten Aggregationsstufe A_3 stehen i(A_3) für die Einzelgeschäfte i. Die Einzelgeschäfte 1 und 2 sind dem Produkt P zuzuordnen, die Einzelgeschäfte 3, 4 und 5 dem Produkt Q.

Für alle Einzelgeschäfte i seien die unsicheren Zahlungsströme $\tilde{\vec{Z}}^i$ sowie deren Verteilung bekannt. Gemäß K1 werden die unsicheren Zahlungsüberschüsse $\tilde{Z}_t^i$ mit Hilfe einheitlicher risikoloser Zinssätze r_p für alle Einzelgeschäfte i (mit $r_p = r_p^i \forall i$) diskontiert und man erhält die Barwerte $\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^i)$, deren Verteilung bekannt sei bzw. durch Faltung ermittelt werden kann.

1. *Ermittlung der Ertragsgröße E^U der Unternehmung und der Ertragsgrößen $E^{P(A\_2)}$ und $E^{Q(A\_2)}$ der Produkte P und Q*

Für die Einzelgeschäfte i liegen - beispielhaft - folgende erwartete Barwerte als Ertragsgrößen E^i vor, welche auf Basis der unsicheren Barwerte $\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^i)$ und deren Verteilungen ermittelt wurden:

i	1	2	3	4	5
$E^i = E(\widetilde{BW}(\tilde{\vec{Z}}^i))$	20	35	5	10	30

Durch wertadditive Aggregation der Ertragsgrößen E^i erhält man die Ertragsgrößen $E^{P(A\_2)} = E^1 + E^2 = 55$ bzw. $E^{Q(A\_2)} = E^3 + E^4 + E^5 = 45$ der Teilportfolios der Produkte P bzw. Q. Schließlich erhält man daraus die Ertragsgröße des Portfolios U der Unternehmung $E^U = E^{P(A\_2)} + E^{Q(A\_2)} = 100$.

2. *Ermittlung der Risikogröße* R^U *der Unternehmung und der Risikogrößen* $R^{P(A\_2)}$ *und* $R^{Q(A\_2)}$ *der Produkte P und Q*

Zusätzlich seien gegeben:

- Die Standardabweichungen σ_i der Einzelgeschäfte i:

I	1	2	3	4	5
σ_i	12	10	10	5	6,25

- Die Korrelationen $\rho_{i,P(A\_2)}$ zwischen den Einzelgeschäften i (mit i={1, 2}) und dem Produkt P:

I	1	2
$\rho_{i,P(A\_2)}$	0,5	0,4

- Die Korrelationen $\rho_{i,Q(A\_2)}$ zwischen den Einzelgeschäften i (mit i={3, 4, 5}) und dem Produkt Q:

I	3	4	5
$\rho_{i,Q(A\_2)}$	- 0,2	1	0,8

- Die Korrelationen zwischen den Produkten P bzw. Q und dem Portfolio U der Unternehmung:

X	P	Q
$\rho_{x(A\_2),U}$	0,6	0,5

Daraus ergibt sich unter Einhaltung der Konsistenzanforderung K2c für die Standardabweichung des

- Teilportfolios P(A_2) des Produkts P: $\sigma_{P(A\_2)} = \sigma_1 \cdot \rho_{1,P(A\_2)} + \sigma_2 \cdot \rho_{2,P(A\_2)}$ = 10
- Teilportfolios Q(A_2) des Produkts Q: $\sigma_{Q(A\_2)} = \sigma_3 \cdot \rho_{3,Q(A\_2)} + \sigma_4 \cdot \rho_{4,Q(A\_2)} + \sigma_5 \cdot \rho_{5,Q(A\_2)}$ = 8 sowie
- Portfolios U der Unternehmung: $\sigma_U = \sigma_{P(A\_2)} \cdot \rho_{P(A\_2),U} + \sigma_{Q(A\_2)} \cdot \rho_{Q(A\_2),U}$ = 10.

Die Risikogrößen R^i der Einzelgeschäfte i lassen sich unter Einhaltung der Konsistenzanforderungen K2a, K2b und K2c wie folgt bestimmen:

i	1	2	3	4	5
$R^i = Cov_{i,U} = \rho_{i,x(A\_2)} \cdot \rho_{x(A\_2),U} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_U$	36	24	-10	25	25

Daher beträgt

- die Risikogröße des Produkts P: $R^{P(A\_2)} = \rho_{P(A\_2),U} \cdot \sigma_{P(A\_2)} \cdot \sigma_U = R^1 + R^2$ = 60,
- der Risikogröße des Produkts Q: $R^{Q(A\_2)} = \rho_{Q(A\_2),U} \cdot \sigma_{Q(A\_2)} \cdot \sigma_U = R^3 + R^4 + R^5$ = 40 und somit
- das Risikogröße der Unternehmung: $R^U = \sigma_U^2$ = 100.

Anhang 6-2: Berechnungen zum Beispiel in Bild 5 (Verteilungsfreie, multidimensionale Aggregation von Ertrags- bzw. Risikogrößen in einer multidimensionalen, hierarchischen Baumstruktur)

In Anhang 6-2 (Bild 5) wird zusätzlich zur Aggregation der Einzelgeschäfte über die Produkte, wie in Anhang 6-1 (Bild 3), eine Aggregation der Einzelgeschäfte über die Kunden der Unternehmung durchgeführt. Gemäß Ergebnis 3 muss eine Aggregation der Ertrags- bzw. der Risikogrößen der Einzelgeschäfte nach Kunden zum gleichen Gesamtertrag bzw. Gesamtrisiko der Unternehmung führen wie eine Aggregation nach Produkten, sofern A1-A5 und K1-K3 erfüllt sind.

Im Folgenden bezeichnet Dim_1 die Dimension der Produkte, Dim_2 die der Kunden. Die Einzelgeschäfte 2 und 3 sind dem Kunden K zuzuordnen, die Einzelgeschäfte 1 und 4 dem Kunden L und das Einzelgeschäft 5 dem Kunden M.

1. *Ermittlung der Ertragsgröße* E^U *der Unternehmung und der Ertragsgrößen* $E^{K(A\_2,Dim\_2)}$, $E^{L(A\_2,Dim\_2)}$ *bzw.* $E^{M(A\_2,Dim\_2)}$ *der Kunden K, L bzw. M.*

Analog zur Aggregation nach den Produkten P und Q, erhält man durch wertadditive Aggregation der Ertragsgrößen E^i die Ertragsgrößen $E^{K(A\_2,Dim\_2)} = E^2 + E^3$ = 40, $E^{L(A\_2,Dim\_2)} = E^1 + E^4$ = 30 bzw. $E^{M(A\_2,Dim\_2)} = E^5$ = 30 der Kunden K, L bzw. M. Schließlich erhält man daraus die Ertragsgröße der Unternehmung $E^U = E^{K(A\_2,Dim\_2)} + E^{L(A\_2,Dim\_2)} + E^{M(A\_2,Dim\_2)}$ = 100.

2. *Ermittlung der Risikogröße* R^U *der Unternehmung und der Risikogrößen* $R^{K(A\_2,Dim\_2)}$, $R^{L(A\_2,Dim\_2)}$ *bzw.* $R^{M(A\_2,Dim\_2)}$ *der Kunden K, L bzw. M.*

Zusätzlich seien die Korrelationen zwischen den Kunden K, L bzw. M und dem Portfolio U der Unternehmung gegeben:

Y	K	L	M
$\rho_{y(A\_2,Dim\_2),U}$	0,5	0,9	0,4

Unter Einhaltung der Konsistenzanforderung K3b werden daher die Korrelationen zwischen den Einzelgeschäften i und den Kunden K, L bzw. M wie folgt bestimmt:

$\rho_{1,L(A\_2,Dim\_2)} = \frac{1}{3}$, $\rho_{2,K(A\_2,Dim\_2)} = 0{,}48$, $\rho_{3,K(A\_2,Dim\_2)} = -0{,}2$, $\rho_{4,L(A\_2,Dim\_2)} = \frac{5}{9}$ und $\rho_{5,M(A\_2,Dim\_2)} = 1$.

Unter Einhaltung der Konsistenzanforderung K3c berechnen sich die Standardabweichungen nach Kunden wie folgt:

$$\sigma_{K(A\_2,Dim\_2)} = \rho_{2,K(A\_2,Dim\_2)} \cdot \sigma_2 + \rho_{3,K(A\_2,Dim\_2)} \cdot \sigma_3 = 2{,}8,$$

$$\sigma_{L(A\_2,Dim\_2)} = \rho_{1,L(A\_2,Dim\_2)} \cdot \sigma_1 + \rho_{4,L(A\_2,Dim\_2)} \cdot \sigma_4 = \frac{61}{9} \text{ und}$$

$$\sigma_{M(A\_2,Dim\_2)} = \rho_{5,M(A\_2,Dim\_2)} \cdot \sigma_5 = 6{,}25.$$

Somit erhält man die Risikogrößen nach Kunden:

Y	K	L	M
$R^{y(A\_2,Dim\_2)} = Cov_{y(A\_2,Dim\_2),U} = \rho_{y(A\_2,Dim\_2),U} \cdot \sigma_{y(A\_2,Dim\_2)} \cdot \sigma_U$	14	61	25

Aggregiert man die Risikogrößen nach Kunden in der Dimension Dim_2, so erhält man für die Risikogröße des Portfolios der Unternehmung das gleiche Ergebnis wie durch die vorherige Aggregation nach Produkten in der Dimension Dim_1 (vgl. Bild 3; Anhang 6-1).

$$R^{U(A\_1)} = R^{K(A\_2,Dim\_2)} + R^{L(A\_2,Dim\_2)} + R^{M(A\_2,Dim\_2)} = R^{P(A\_2,Dim\_1)} + R^{Q(A\_2,Dim\_1)} = 14 + 61 + 25 = 100.$$

Anhang 6-3: Berechnungen zum Beispiel in Bild 6 (Verknüpfung und Aggregation von Wertbeiträgen in einer multidimensionalen, hierarchischen Baumstruktur)

Aufbauend auf Anhang 6-1 (Bild 3) und Anhang 6-2 (Bild 5) illustriert Anhang 6-3 (Bild 6) die Verknüpfung von Ertrags- und Risikogrößen zu Wertbeiträgen und deren Aggregation über mehrere Aggregationsstufen. Zur Bestimmung von Wertbeiträgen sind Ertrags- bzw. Risikogrößen mit den Parametern a bzw. b einheitlich zu bewerten und anschließend additiv gemäß A6 zu verknüpfen. Für Anhang 6-3 (Bild 6) werde zusätzlich angenommen, dass gemäß A6 die unsicheren Barwerte der Einzelgeschäfte - näherungsweise - normalverteilt sind. Die Unternehmung bewerte jede Ertragsgröße mit a=1 und aufgrund ihrer risikoaversen Einstellung jede Risikogröße mit dem Parameter b = 0,5>0.

So lässt sich der Wert(-beitrag) der Unternehmung: $W^U_{BW^*} = a \cdot E^U_{BW^*} - b \cdot R^U_{BW^*} = 50$ auf Basis der Ergebnisse aus Anhang 6-1 (Bild 3) und Anhang 6-2 (Bild 5) ermitteln.

Für die Wertbeiträge der Produkte P bzw. Q ergeben sich - trotz jeweils unterschiedlicher eingehender Ertrags- bzw. Risikogrößen jeweils die gleichen Wertbeiträge:

- $W_{BW^*}^{P(A\_2)} = a \cdot E_{BW^*}^{P(A\_2)} - b \cdot R_{BW^*}^{P(A\_2)}$ = 25 bzw.
- $W_{BW^*}^{Q(A\_2)} = a \cdot E_{BW^*}^{Q(A\_2)} - b \cdot R_{BW^*}^{Q(A\_2)}$ = 25.

Für die Wertbeiträge der Kunden K, L bzw. M ergeben sich die Wertbeiträge:

- $W_{BW^*}^{K(A\_2, Dim\_2)} = a \cdot E_{BW^*}^{K(A\_2, Dim\_2)} - b \cdot R_{BW^*}^{K(A\_2, Dim\_2)}$ = 33,
- $W_{BW^*}^{L(A\_2, Dim\_2)} = a \cdot E_{BW^*}^{L(A\_2, Dim\_2)} - b \cdot R_{BW^*}^{L(A\_2, Dim\_2)}$ = -0,5 bzw.
- $W_{BW^*}^{M(A\_2, Dim\_2)} = a \cdot E_{BW^*}^{M(A\_2, Dim\_2)} - b \cdot R_{BW^*}^{M(A\_2, Dim\_2)}$ = 17,5.

Zusätzlich lassen folgende Wertbeiträge $W_{BW^*}^{i}$ der Einzelgeschäfte i berechnen:

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
E^i	20	35	5	10	30
R^i	36	24	-10	25	25
$W_{BW^*}^{i} = a \cdot E_{BW^*}^{i} - b \cdot R_{BW^*}^{i}$	**2**	**23**	**10**	**-2,5**	**17,5**

Anhang 7: Zusammenhang von Risikogrößen R und Value-at-Risk-Größen als Shortfallrisikomaß

Das Value-at-Risk-Konzept ist ein mögliches Konzept zur Bestimmung der Höhe des Shortfallrisikos der Unternehmung und ein bei Banken und Industrieunternehmungen sehr verbreiteter Ansatz: Der Value-at-Risk (VaR) ist nach [UhAu96][ii] definiert als „die in Geldeinheiten gemessene, negative Wertveränderung einer riskanten Vermögensposition, die mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit innerhalb eines bestimmten Zeitraums nicht überschritten wird.“ Das Konzept des Value-at-Risk besitzt zwar eine Reihe von Schwächen, wie z.B. der Verletzung der Subadditivitätseigenschaft, die in zahlreichen Beiträgen (z.B. [Szeg02][iii]) bereits diskutiert wurden. Aufgrund seiner regulatorischen Anerkennung bspw. nach KonTraG (für in Deutschland börsennotierte Unternehmungen) bzw. Basel II (für Banken), hat das Value-at-Risk-Konzept dennoch eine große Bedeutung und weite Verbreitung bei Banken und Industrieunternehmungen errungen.

Folgender einfacher Zusammenhang von (barwertigen) Risikogrößen und entsprechenden Value-at-Risk-Größen kann für normalverteilte Barwerte hergestellt werden:

Ist Annahme A6 erfüllt, so sind die unsicheren Barwerte $\tilde{B}W(\vec{\tilde{Z}}^i)$ der Einzelgeschäfte i der Unternehmung normalverteilt. Daher ist auch der unsichere Barwert $\tilde{B}W(\vec{\tilde{Z}}^U)$ des Portfolios U der Unternehmung normalverteilt. Der Value-at-Risk $VaR^U_{1-\gamma,BW^*} = V_{VaR,1-\gamma,BW^*}(\vec{\tilde{Z}}^U)$ des Zahlungsstroms $\vec{\tilde{Z}}^U$ des Portfolios U der Unternehmung kann für ein bestimmtes Konfidenzniveau (1-γ) durch die Multiplikation der Standardabweichung $\sigma^U_{BW^*}$ mit dem Quantil q_γ der Normalverteilung ermittelt werden:

Es gilt: $VaR^U_{1-\gamma,BW^*} = q_\gamma \cdot \sigma^U_{BW^*}$

mit q_γ: Quantil der Normalverteilung (bspw. $q_{\gamma=1\%} = 2{,}33$; $q_{\gamma=5\%} = 1{,}65$)

Zur Ermittlung des Value-at-Risk-Beitrags $VaR^{x(A\_k,Dim\_d)}_{1-\gamma,BW^*}$ eines Teilportfolios x(A_k, Dim_d) auf einer beliebigen Aggregationsstufe A_k (mit 1≤k≤n) in einer beliebigen Dimension Dim_d kann dazu folgende Formel herangezogen werden:

$$VaR^{x(A\_k,Dim\_d)}_{1-\gamma,BW^*} = q_\gamma \cdot \rho_{x(A\_k,Dim\_d),U(A\_n),BW^*} \cdot \sigma^{x(A\_k,\ Dim\_d)}_{BW^*} = q_\gamma \cdot \frac{R^{x(A\_k,\ Dim\_d)}_{BW^*}}{\sigma^U_{BW^*}}$$

mit $\rho_{x(A\_k),U(A\_1),BW^*}$: Korrelation zwischen dem Barwert des Teilportfolios x(A_k, Dim_d) und dem Barwert des Portfolios U der Unternehmung.

[ii] [UhAu96] Uhlir, H./Aussenegg, W.: Value-at-Risk (VaR). Einführung und Methodenüberblick. In: Österreichisches Bankarchiv, 44. Jg., H.11, S. 831-836, 1996.
[iii] [Szeg02] Szegö, G.: Measures of Risk. In: Journal of Banking and Finance, Vol. 26, 2002, S. 1253-1272.

Anmerkung: Für andere Verteilungen - als die hier angenommene Normalverteilung - sind aufwendige Simulationen zur Ermittlung der Value-at-Risk-Beiträge durchzuführen.

Analog zu obigen Beweisen für die Risikogrößen $R_{BW*}^{x(A\_k,Dim\_d)}$ kann für die Value-at-Risk-Beiträge $VaR_{1-\gamma,BW*}^{x(A\_k,Dim\_d)}$ auf beliebigen Aggregationsstufen in beliebigen Dimensionen Wertadditivität nachgewiesen werden, wenn die folgende zusätzliche Konsistenzanforderung K5 erfüllt ist:

Konsistenzanforderung K5: Das Quantil q_γ der Normalverteilung ist einheitlich, d.h. zu einem einheitlich Konfidenzniveau 1-γ, zur Value-at-Risk-Bewertung für alle Teilportfolios x(A_k, Dim_d) (mit 1≤k≤n) in hierarchischen Baumstrukturen anzuwenden.

Der Value-at-Risk kann zur Überwachung der Risikotragfähigkeit der Unternehmung dienen und zur Risikolimitierung und internen Eigenkapitalsteuerung eingesetzt werden. Er entspricht als Shortfall-Risikomaß dem KonTraG (vgl. [Huth03]). Auf Basis integrierter Ertrags- und Risikodatenbanken können wertadditive Value-at-Risk-Größen von Einzelgeschäften, über Teilportfolios bis hin zum Portfolio der Unternehmung als Produkt der jeweiligen Risikogrößen und dem entsprechenden unternehmensweiten Quantil auf einfache Weise generiert werden, wenn die Annahme A6 sowie die Konsistenzanforderung K5 erfüllt sind.