



Universität Augsburg  
Prof. Dr. Hans Ulrich Buhl  
Kernkompetenzzentrum  
Finanz- & Informationsmanagement  
Lehrstuhl für BWL, Wirtschaftsinformatik,  
Informations- & Finanzmanagement

**UNIA**  
Universität  
Augsburg  
University

Diskussionspapier WI-161

## Optimale Darlehensbündel in der privaten Immobilienfinanzierung

von

Jochen Dzienziol, Dennis Kundisch

in: Kredit und Kapital 42 (2009) 4, S. 539-562



# **Optimale Darlehensbündel in der privaten Immobilienfinanzierung**

## **Zusammenfassung:**

Der Beitrag greift das in der Literatur wenig beleuchtete Problem der vorteilhaften Strukturierung einer Immobilienfinanzierung für Privatinvestoren ausgehend von am Markt beobachtbaren unterschiedlichen angebotenen Nominalzinssätzen auf. Es werden bislang unbehandelte Optimierungspotenziale aufgezeigt und somit das Fundament für die Vermeidung einer systematischen Fehlberatung gelegt. Zudem ergeben sich interessante Ansatzpunkte zur Weiterentwicklung bestehender Geschäftsmodelle insbesondere von Online-Finanzintermediären am Markt.

**Stichwörter:** Darlehensbündel, Online-Finanzintermediär, gemischt-binäre Optimierung, Immobilienfinanzierung, Privatkunden

JEL: G21, D14

## **Optimal bundles of mortgage loans for private clients**

### **Summary:**

This contribution focuses on the so far sparsely addressed issue of structuring mortgage lending for private clients based on differing nominal rates, which can be observed in the market. Hitherto ignored optimization potentials are identified and thus, systematically wrong financial advice can be avoided. Moreover, the results may serve as relevant starting points for an extension of existing business models of online financial intermediaries.

**Keywords:** bundle of loans, online financial intermediary, mixed binary optimization, mortgage financing, private clients

## I. Einleitung

Eine Immobilienfinanzierung ist für einen privaten Selbstnutzer in der Regel eine Leistung, die er über viele Jahre bzw. sogar Jahrzehnte in Anspruch nimmt und welche einen Einfluss auf seine gesamte finanzielle Sphäre hat. Dementsprechend gehen der Entscheidung für ein oder mehrere Finanzierungsanbieter meist eine ausführliche Beratung sowie der Vergleich verschiedener Angebote voraus. Die Möglichkeiten eines solchen Vergleichs haben sich in den letzten Jahren durch die nachhaltige Etablierung von zahlreichen Vergleichs- und Vermittlungsplattformen – wie bspw. [www.baugeld-vergleich.de](http://www.baugeld-vergleich.de), [www.planethome.de](http://www.planethome.de) oder [www.interhyp.de](http://www.interhyp.de), im Folgenden als Online-Finanzintermediäre bezeichnet – aus Verbrauchersicht kontinuierlich verbessert<sup>1</sup> und der Markt hat sich mittlerweile zu einem Käufermarkt mit einem hohen Wettbewerbsdruck und gesunkenen Margen – zumindest bei den klassischen Geschäftsbanken<sup>2</sup> – entwickelt.

Trotz der hohen Bedeutung des Marktsegments „private Immobilienfinanzierung“<sup>3</sup> für viele deutsche Finanzdienstleister ist die Beratungsqualität im Markt oft unterdurchschnittlich.<sup>4</sup> Vielfach wird einfach das Darlehen angeboten, welches bei den Vorgaben des Kunden (Annuität und Darlehenshöhe) den niedrigsten Effektivzins aufweist. Existieren günstige, aber in der Darlehenshöhe begrenzte, Angebote, was zum Beispiel auf Förderdarlehen wie das KfW-Wohneigentumsprogramm zutrifft, so werden diese Darlehen entweder gar nicht oder in maximal möglicher Höhe in die Lösung einbezogen und mit dem nächst günstigeren (bei klassischen Geschäftsbanken häufig dem eigenen) Annuitätendarlehen ergänzt. Auch bei Online-Finanzintermediären wird man in der Regel das – bspw. gemessen am Effektivzinssatz – günstigste Darlehen angeboten bekommen und im Rahmen der ergänzenden telefonischen Beratung evtl. noch auf den möglichen Einbezug von „günstigen“ KfW-Darlehensmitteln hingewiesen werden. In der wissenschaftlichen Diskussion finden sich analoge Empfehlungen. In Schöpe (2000, S. 79) wird bspw. empfohlen „[...] verschiedene Finanzierungsalternativen miteinander zu kombinieren nach dem Prinzip, die vorteilhafteste Variante zuerst und in möglichst großem Umfang, daran anschließend die zweitbeste und die

---

<sup>1</sup> Zur internetbasierten Immobilienfinanzierung vgl. (Iblher, 2003). Zu den Megatrends im Finanzdienstleistungsmarkt vgl. bspw. (Buhl et al., 2002). Einen Überblick über den europäischen Immobilienfinanzierungsmarkt sowie Trendaussagen bzgl. zukünftiger Geschäftsmodelle in diesem Bereich gibt (Douna et al., 2007).

<sup>2</sup> Zu sinkenden Margen im Finanzdienstleistungsbereich in Europa vgl. bspw. (Weil et al., 2003).

<sup>3</sup> Bestandsvolumen im Juni 2007: 792 Mrd. Euro, vgl. (Deutsche Bundesbank, 2007). Das Neugeschäft pro Quartal lag dabei im Durchschnitt der letzten 4,5 Jahre bei ca. 44 Mrd. Euro.

<sup>4</sup> Stiftung Warentest hat bei der Beratungskompetenz und -qualität deutliche Mängel festgestellt: Nur in jeder vierten Filiale wurde in einem 2003 zum dritten Mal durchgeführten Test gut beraten und häufig „beschränkten sich die Berater auf simple Standardfinanzierungen“. (Stiftung Warentest, 2003, S. 13).

nachteiligste möglichst nicht einzusetzen.“

Diese Vorgehensweise erscheint auf den ersten Blick ökonomisch sinnvoll, führt jedoch in bestimmten Situationen zu systematischen Fehlentscheidungen. Oder positiver formuliert: Es bestehen – wie im Folgenden gezeigt wird – bislang am Markt ungenutzte Optimierungspotenziale im Hinblick auf das Angebot von intelligenten Darlehenskombinationen. Und diese beschränken sich nicht auf die Kombination eines (Standard-)Annuitätendarlehens mit einem KfW-Darlehen, sondern es kann insbesondere auch die intelligente Kombination von mehreren (Standard-)Annuitätendarlehen vorteilhaft sein. Die Frage nach einer optimalen Darlehenskombination ist jedoch nicht trivial, da der von einem Anbieter angebotene Zinssatz von der Darlehenshöhe und/oder dem anfänglichen Tilgungssatz bzw. dem Verhältnis aus Annuität und Darlehenshöhe<sup>5</sup> abhängig sein kann. Dabei sind Online-Finanzintermediäre, als Mittler zwischen Darlehensnehmer und einer Vielzahl von Darlehensgebern, in der herausgehobenen Position, diese Potenziale auf Grund der Kenntnis der Kalkulationsgrundlagen der Darlehensanbieter für Ihre Kunden zu nutzen und sich damit weitere Wettbewerbsvorteile zu verschaffen.

Der vorliegende Aufsatz möchte einen Beitrag zur Schließung der postulierten Lücke leisten und dabei mit Hilfe eines quantitativen Modells insbesondere die folgenden Forschungsfragen beantworten:

1. In welcher Situation der Darlehensgeberkalkulation ergibt sich für den Darlehensnehmer ein Darlehensbündel – und nicht ein einzelnes Darlehen – als optimale Lösung?
2. Welches ist die optimale Aufteilung der Darlehenshöhe und Annuität auf die Darlehensgeber, falls ein Darlehensbündel optimal ist?

Im folgenden Kapitel wird das Potenzial für Kombinationen mehrerer Darlehen thematisiert. Zudem wird der Beratungsprozess aus Sicht des Darlehensnehmers skizziert. Die grundlegenden Modellannahmen der Darlehensnehmer- und Darlehensgeber-Kalkulation und die darauf aufbauenden Optimierungsüberlegungen werden in Kapitel III vorgestellt und diskutiert. Der Beitrag schließt mit einem Fazit in Kapitel IV.

---

<sup>5</sup> Es besteht der Zusammenhang  $(\text{Annuität} - \text{Darlehenshöhe} \times \text{Zinssatz}) / \text{Darlehenshöhe} = \text{anfänglicher Tilgungssatz}$ .

## II. Potenzial für integrierte Angebote und die Sicht der Nutzer

In diesem Kapitel wird zunächst das Potenzial für integrierte Angebote verdeutlicht, um dann die Entscheidungssituation und den Beratungsprozess aus Nutzersicht zu diskutieren. Beides dient als Hinführung zur formalen Modellierung der Problemstellung in Kapitel III.

### 1. Potenzial für integrierte Angebote

Betrachten wir zunächst das folgende Beispiel.

*Beispiel 1: Ein Kunde sucht nach einer Baufinanzierung über 200.000 Euro und kann 20.000 Euro als Annuitätenzahlung p.a. aufbringen. Er erhält die beiden folgenden Angebote:*

	<i>Bank 1</i>	<i>Bank 2</i>
<i>Darlehenssumme</i>	200.000 Euro	200.000 Euro
<i>Annuität</i>	20.000 Euro	20.000 Euro
<i>Zinsbindung</i>	10 Jahre	10 Jahre
<i>Nominal-/Effektivzins</i>	7,70%	7,69%
<i>Anfängliche Tilgung p.a.</i>	2,30%	2,31%
<i>Restschuld am Ende der Zinsbindung</i>	134.304	134.041 Euro

*Die Entscheidung des Kunden ist klar: Bank 2 ist – zwar knapp aber dennoch – besser als Bank 1. Der Kunde freut sich, dass er einen relativ günstigen Darlehensgeber gefunden hat. Er kommt jedoch nicht auf die Idee bei den Banken nachzufragen, welchen Zinssatz er bei einer niedrigeren Darlehenshöhe angeboten bekommen hätte – warum auch, er benötigt ja 200.000 Euro. Interessant ist jedoch, dass Bank 1 ihm bei einer höheren anfänglichen Tilgung – verursacht durch bspw. eine niedrigere Darlehenshöhe bei gleich hoher Annuität und Zinsbindung wie bisher – auch einen niedrigeren Zinssatz offeriert hätte. Bei Bank 2 hingegen ist dieses Verhältnis zwischen Darlehenshöhe und Annuität für das Angebot irrelevant. Hätte der Kunde diesen Umstand erkannt, hätte er sich den folgenden Angeboten der beiden Banken gegenüber sehen können.*

	<i>Bank 1</i>	<i>Bank 2</i>
<i>Darlehenssumme</i>	139.164 Euro	60.836 Euro
<i>Annuität</i>	20.000 Euro	0 Euro
<i>Zinsbindung</i>	10 Jahre	10 Jahre
<i>Nominal-/Effektivzins</i>	7,20%	7,70%
<i>Anfängliche Tilgung</i>	7,17%	./.
<i>Restschuld am Ende der Zinsbindung</i>	0 Euro	127.737 Euro
<i>Restschuldsomme Darlehensbündel</i>	127.737 Euro	

*Durch eine geschickte Aufteilung der Gesamtdarlehenssumme auf die beiden Banken würde seine Restschuld also nach 10 Jahren insgesamt nur 127.737 Euro betragen.<sup>6</sup> Das heißt 6.304 Euro weniger als bei der von ihm gewählten „günstigen“ Finanzierung von Bank 2.*

<sup>6</sup> Die genauen Kalkulationsgrundlagen der Darlehensgeber und das Optimierungsvorgehen werden im Folgenden detailliert dargestellt. Vgl. auch insbesondere Beispiel 2.

Wann und warum dieses im Beispiel angedeutete Optimierungspotenzial existiert, weshalb gerade Online-Finanzintermediäre dieses Potenzial nutzen können und wieso zwischen Kunden und dem Kollektiv der Darlehensgeber dann dennoch eine Win-Win-Beziehung besteht, wird im Folgenden analysiert und beschrieben.

Damit Kunden eine optimale Empfehlung gegeben werden kann, ist – wie im Beispiel plakativ aufgezeigt – eine integrierte Optimierung der Aufteilung des Finanzierungsbedarfs und der Annuität auf die vorliegenden Darlehensangebote notwendig. In der wissenschaftlichen Literatur ist diese Problemstellung im Kontext der (Immobilien-) Finanzierung bisher allenfalls rudimentär behandelt worden.<sup>7</sup>

Ließe sich jede einzelne Kreditrückzahlung des Darlehensnehmers als Rückzahlung eines leerverkauften Zerobonds interpretieren, so wäre die Optimierung einfach: Es wird für jede einzelne Zahlung derjenige Darlehensgeber ausgewählt, welcher zu Finanzierungsbeginn hierfür den höchsten Geldbetrag zur Verfügung stellt. Eine Interpretation der Kreditzahlungen als Zerobonds ist jedoch aus folgenden Gründen nicht treffend: Einerseits ist jeder Kreditvertrag aus Sicht des Darlehensgebers mit Fixkosten (z.B. Beratungsgespräch, Kreditvergabeprozess, Kontoführung, etc.) verbunden, weshalb „Fixkostendegressionseffekte“ bei zunehmendem Kreditbetrag entstehen, was wiederum die Kreditkonditionen beeinflusst. Andererseits sind am Markt Kreditverträge mit regelmäßigen Zahlungen (Annuitäten) üblich.

Selbst wenn alle Anbieter am Markt in Anlehnung an die Marktzinsmethode<sup>8</sup> kalkulieren, können sich dennoch zwischen diesen deutliche Unterschiede ergeben. Beispielhaft sind im Folgenden einige mögliche Gründe dafür aufgeführt:

---

<sup>7</sup> Für unterschiedliche Vorteilhaftigkeitsanalysen in der Immobilienfinanzierung vgl. insbesondere (Schöpe, 2000, 127ff.), wobei Abhängigkeiten zwischen Finanzierungsbausteinen vernachlässigt werden. (Wolfersberger, 2000) untersucht die optimale Wahl eines Disagios, wobei sich für selbstgenutzte Wohnimmobilien in der Regel ein Disagio von Null als optimale Lösung ergibt. (Buhl et al., 1999) diskutierten die Gestaltungsmöglichkeiten durch Leasingverträge in der privaten Immobilienfinanzierung. Praxisorientierte „Ratgeber“ zur Immobilienfinanzierung wie (Brückner/Lücke, 2004), (Höltling, 2004) oder (Schulze/Stein, 2004) weisen nur zum Teil auf einen Zusammenhang zwischen anfänglichem Tilgungssatz und Darlehenszinssatz hin (vgl. (Höltling, 2004, S. 98)). Gelegentlich werden auch sehr pauschale Empfehlungen abgegeben: „Empfehlenswert sind daher Tilgungsraten von einem Prozent jährlich [...]“, (Schulze/Stein, 2004, S. 169).

<sup>8</sup> Bei der exakten Verwendung der Marktzinsmethode wird von einem Konditionsbeitragsbarwert gesprochen. Da – wie später noch erläutert wird – jedoch keine Vorteilhaftigkeitsbeurteilung eines Einzelgeschäftes, sondern eine Vorgabe für die Konditionskalkulation im Vordergrund steht, wird dieser Begriff nicht verwendet und von einer Kalkulation „in Anlehnung an die Marktzinsmethode“ gesprochen.

- Skaleneffekte.
- Unterschiedlicher Zugang zu Geld- und Kapitalmärkten.<sup>9</sup>
- Kalkulation nach dem Opportunitätsprinzip, nach dem Gegenseitenkonzept oder engpassorientierte Betrachtungsweise.<sup>10</sup>
- Unterschiede im Rating.
- Refinanzierungsvorteile gegenüber dem Geld- und Kapitalmarkt durch Spareinlagen mit niedrigem Zinssatz, welche auf Grund geschäftspolitischer Überlegungen ganz oder teilweise an die Kreditkalkulation weitergegeben werden.<sup>11</sup>
- Unterschiedliches (Risiko-)Diversifikationspotenzial auf Grund unterschiedlicher bestehender Kreditportfolios.<sup>12</sup>

Die Kalkulationszinssatzfunktionen der individuell rational kalkulierenden Darlehensgeber können also durchaus parallel nach oben oder unten verschoben sein, unterschiedliche Steigungen im Zeitablauf aufweisen oder sich schneiden,<sup>13</sup> selbst wenn alle Anbieter dieselbe Kalkulationsmethodik anwenden. Bei unterschiedlicher Kalkulationsmethodik ist die dauerhafte Existenz von unterschiedlichen Kalkulationszinssatzfunktionen bei verschiedenen Anbietern am Markt noch wahrscheinlicher.

Nun sind die Informationen bzgl. der Kalkulationszinssatzfunktionen verschiedener Anbieter nicht öffentlich. Im Allgemeinen kann man daher nur durch Rückrechnen auf Basis einer Vielzahl von erstellten Angeboten Rückschlüsse auf diese Zinssatzfunktionen ziehen. Eine Ausnahme bilden hier die oben genannten Online-Finanzintermediäre. In deren Rechenkernen zur Erstellung von Online-Kreditangeboten werden die Kalkulationszinssatzfunktionen sowie die Kalkulationsgrundlagen aller an eine Vergleichsplattform angeschlossenen Kreditanbieter

<sup>9</sup> Vgl. (Schierenbeck, 2003, S. 220f.). Bspw. bei den Emissionsmöglichkeiten auf internationalen Märkten können zwischen Darlehensgeber deutliche Unterschiede existieren.

<sup>10</sup> Vgl. (Schierenbeck, 2003, S. 222ff.).

<sup>11</sup> Diese „Quersubventionierung“ muss jedoch keineswegs irrational sein, sondern kann sich zum Beispiel darauf gründen, dass über (Bau-)Finanzierungen zusätzliche Cross-Selling-Erträge durch den Abschluss von Absicherungsprodukten (Risikolebensversicherungen, Berufsunfähigkeitsversicherungen etc.) in Aussicht stehen. Die Marktzinsmethode würde derartige Zinsvorteile lediglich dem Sparprodukt zuschreiben. Genauso würden die Erträge aus einer fristeninkongruenten Refinanzierung als Strukturbeitrag von der Beurteilung des Einzelgeschäfts separiert werden. Vgl. hierzu (Schierenbeck, 2003, S. 70ff.).

<sup>12</sup> Es ergeben sich in der Regel ebenfalls Unterschiede, wenn die Bonität des Darlehensnehmers auf Grund unterschiedlicher Verfahren berechnet wird. Zudem ist es eine geschäftspolitische Entscheidung, ob Eigenkapitalkosten in der Einzelgeschäftskalkulation zu berücksichtigen sind. Ist ausreichend Eigenkapital für alle geplanten risikobehafteten Geschäfte vorhanden, ist dies durchaus fraglich. Erfolgt die Refinanzierung durch Verkauf der Darlehensforderung an einen nichtunterlegungspflichtigen Vertragspartner, ist grundsätzlich ebenfalls kein Aufschlag zu berücksichtigen. Vgl. hierzu (Gaida/Homölle/Pfingsten, 1996, S. 27ff.).

<sup>13</sup> Gleichwohl kann sich der Markt trotzdem im Gleichgewicht befinden. Bspw. hat (Schaefer, 1981, 1982a, 1982b) im Kapitalmarktcontext gezeigt, dass es trotz vorhandener Bewertungsunterschiede (bei Schaefer aufgrund unterschiedlicher Besteuerung) von Bonds aus Sicht unterschiedlicher Marktteilnehmer und daraus resultierender Arbitragemöglichkeiten zu einem Marktgleichgewicht kommen kann, wenn die Teilnehmer Handelsbeschränkungen unterliegen.



vorgehalten. Solche Online-Finanzintermediäre sind daher in der herausgehobenen Position, diese Informationen für ihre Kunden zu nutzen ohne gleichzeitig die Kreditanbieter dabei schlechter zu stellen. Dass dies möglich ist, wird in Kapitel III gezeigt, zunächst wird jedoch noch auf den Beratungsprozess aus Sicht eines Darlehensnehmers eingegangen.

## 2. Selbstnutzer als Darlehensnehmer - Beratungsprozess

Handelt es sich bei dem Darlehensnehmer um einen Selbstnutzer, so spielen steuerliche Aspekte – wie bspw. die steuerliche Anrechenbarkeit von Darlehenszinsen als Werbungskosten bei Fremdvermietung – in der Kalkulation keine Rolle. Vielmehr werden mit der Anschaffung der Immobilie andere – oftmals nicht finanzwirtschaftlich geprägte – Ziele verfolgt. Gleichwohl sollte die Finanzierung dieser Immobilie aus finanzwirtschaftlicher Sicht möglichst vorteilhaft sein. Im Beratungsprozess wird dabei in der Praxis üblicherweise zunächst der Gesamtkapitalbedarf für das Vorhaben ermittelt. Anschließend werden die vorhandenen Eigenmittel, welche in die Investition eingebracht werden sollen bzw. können, abgezogen, um den Finanzierungsbedarf zu erhalten. Mit Hilfe einer Haushaltsrechnung wird die für den Kapitalsdienst freie periodische Liquidität berechnet. Welcher Betrag als Annuität aufgebracht wird, ist also in der Regel nicht von den Konditionen eines Darlehens, sondern von der freien Liquidität abzüglich eines vom Kunden gewünschten Sicherheitsabschlags für ungeplante Ausgaben abhängig. Die Höhe der Annuität determiniert damit letztlich wie schnell das (oder die) Darlehen zurückgeführt werden können. Die nach Ablauf der Zinsbindung verbleibende Restschuld kann in einem solchen Fall als finanzwirtschaftlich sinnvolles Entscheidungskriterium verwendet werden. Ist die (Gesamt-) Darlehenshöhe, die (Gesamt-)Annuität sowie der Betrachtungszeitraum gegeben, so unterscheiden sich verschiedene Angebote nur in der resultierenden Restschuld. Diese ist für den Kunden zudem leicht(er) nachvollziehbar (als bspw. ein Effektivzins).

Im folgenden Kapitel wird die Kalkulation und Entscheidungssituation der Darlehensgeber und Darlehensnehmer in Form von Annahmen konkretisiert, um darauf aufbauend die Analyse im Hinblick auf das postulierte Optimierungspotenzial durchzuführen. Das Erkenntnisinteresse ist dabei nicht zu zeigen, dass es grundsätzlich ein Optimierungspotenzial gibt, sondern in welchen Situationen der Darlehensgeberkalkulationen eine Darlehenskombination vorteilhaft für den Darlehensnehmer sein kann.

### III. Modell

#### 1. Annahmen

- (A1) Der Darlehensnehmer benötigt den Finanzierungsbetrag  $D$ , welchen er mit einer jährlichen<sup>14</sup>, zeitkonstanten Annuität  $A$  tilgen möchte. Er wählt im Zeitpunkt  $t = 0$  das Darlehensangebot bzw. das Bündel aus Darlehensangeboten, welches am Ende der von ihm vorgegebenen Zinsbindungsdauer  $n$  die geringste Restschuld  $R$  aufweist.<sup>15</sup> Der Darlehensnehmer möchte seine Finanzierung über einen Online-Finanzintermediär abwickeln.
- (A2) Zur Auswahl stehen die Angebote der Darlehensgeber  $b = 1, \dots, B$  mit zeitkonstanten, von der Höhe des Darlehens  $D_b \geq 0 \quad \forall b$ , der Annuität  $A_b \geq 0 \quad \forall b$ , der Zinsbindungsdauer  $n$  sowie des Anbieters  $b$  abhängigen Nominalzinssätzen  $\hat{i}_b = f(b, A_b, D_b, n)$ . Die Annuität der Darlehensangebote sei bis zum Ende der Zinsbindungsdauer zeitkonstant<sup>16</sup> und wird mit den Darlehenszinsen jährlich nachschüssig bezahlt und verrechnet.<sup>17</sup>
- (A3) Der Barwert des Darlehenszahlungsstroms – bestehend aus  $D_b, A_b, R_{b,n}, n$  – soll einem vorgegebenen Wert  $C_b \geq 0$  entsprechen. Die jeweiligen Kalkulationszinssätze für die Zeitpunkte  $t$  ergeben sich aus den am Kapitalmarkt ermittelbaren Zerobondabzinsungsfaktoren  $i_t$  für risikofreie Anlagepapiere zuzüglich anbieterabhängiger und zeitpunktabhängiger Aufschläge  $c_{b,t}$ .<sup>18</sup>

---

<sup>14</sup> In der Praxis sind monatliche oder vierteljährliche Annuitäten üblich. Der Einbezug unterjähriger Annuitäten in die vorliegende Modellierung ist problemlos möglich, generiert jedoch keine zusätzlichen Erkenntnisse, sondern würde die Darstellung lediglich verkomplizieren.

<sup>15</sup> Dabei werden weitere, hauptsächlich qualitative Kriterien wie die Zuverlässigkeit in der Abwicklung, Beratungsqualität, Erreichbarkeit und Flexibilität von Darlehensanbietern vernachlässigt. Obwohl diese Kriterien nur aus der Erfahrung mit mehreren Darlehensanbietern heraus beurteilt werden können, werden sie auf Grund der Veröffentlichung von Erfahrungsberichten und Ratings zunehmend für die Entscheidung des einzelnen Darlehensnehmers relevant.

<sup>16</sup> Die Wirkung von Sondertilgungsmöglichkeiten wird in diesem Beitrag nicht diskutiert.

<sup>17</sup> Der jährliche Effektivzinssatz eines Darlehensangebots entspricht damit dem Nominalzinssatz, wenn keine weiteren, nach der Preisangabenverordnung zu berücksichtigenden, Zahlungen wie bspw. Darlehensgebühren existieren. Bezüglich unterjähriger Zins-/Tilgungsverrechnungen und Abweichungen zwischen Annuitätenzahlungszeitpunkt und -verrechnung gilt Fußnote 14 entsprechend.

<sup>18</sup> Die Annahme lässt somit sowohl eine Kalkulation basierend auf der in Wissenschaft und Praxis verbreiteten Marktzinsmethode (*Schierenbeck*, 2003, S. 43ff.) zu als auch die teilweise in der Praxis vorzufindende Vorgehensweise, in Abhängigkeit der Zinsbindungsdauer einen bestimmten Effektivzins vorzugeben. Der vorgegebene Barwert ist dann Null zu setzen und die zeitpunktabhängigen Aufschläge so festzulegen, dass sie in Summe mit dem Zerobondabzinsungsfaktor zu jedem Zeitpunkt  $t$  diesen Effektivzins ergeben. Dieses Vorgehen ist finanzwirtschaftlich kritisierbar, da es die unterschiedlichen Steuerwirkungen des Kundengeschäfts (zeitkonstanter Zinssatz) und der Refinanzierungszinszahlungen nicht berücksichtigt. Die Berücksichtigung würde die folgende Analyseergebnisse nicht wesentlich verändern, die weitere Darstellung jedoch unübersichtlich machen. Für ein detailliertes Konzept zur Einzelgeschäftskalkulation unter Berücksichtigung von Steuern vgl. (*Wöhle*, 2005).

(A4) Alle Darlehensgeber-Kalkulationen sowie die Entscheidungssituation des Darlehensnehmers sind dem Online-Finanzintermediär bekannt.

## 2. Analyse

Aus Sicht eines Darlehensgebers erscheint es sinnvoll, statt bspw. einer Zinsmarge einen zu erreichenden Barwert in den Kalkulationsvorschriften vorzugeben.<sup>19</sup> Es ist dann unerheblich für diesen Darlehensgeber, in welcher Höhe „sein Darlehen“ Teil eines durch den Online-Finanzintermediär optimierten Darlehensangebots an den Kunden wird. Die Optimierung für den Darlehensnehmer kann dann in diesem Sinne nicht zu Lasten der Darlehensgeber gehen.

Formal ist Darlehensgeber  $b$  indifferent zwischen unterschiedlichen Wertekombinationen aus  $A$ ,  $D$  und  $n$ , wenn folgende Gleichung erfüllt ist:

$$(1) \quad C_b = -D_b + A_b \cdot \sum_{t=1}^n \frac{1}{\underbrace{(1+i_t + c_{b,t})^t}_{r_{b,n}}} + R_{b,n} \cdot \frac{1}{\underbrace{(1+i_n + c_{b,n})^n}_{1/s_{b,n}}}$$

$$\Leftrightarrow R_{b,n} = C_b \cdot s_{b,n} + D_b \cdot s_{b,n} - A_b \cdot r_{b,n} \cdot s_{b,n}$$

Dabei ist  $r_{b,n}$  der Rentenbarwertfaktor einer Annuität von einer Geldeinheit über den Zeitraum  $n$  und  $s_{b,n}$  der Endwertfaktor zur barwertneutralen Verschiebung einer Zahlung vom Zeitpunkt  $t = 0$  nach  $t = n$  (im Folgenden Spot-Rate  $(0,n)$  genannt). Das Produkt  $r_{b,n} \cdot s_{b,n}$  ist somit der Rentenendwertfaktor einer Annuität.

### a. Darstellung der Optimierungsproblemstellung

Zu entscheiden ist, bei welchem Darlehensgeber (Entscheidungsvariable  $x_b$ ) ein Darlehen in welcher Höhe (Entscheidungsvariable  $D_b$ ) aufgenommen wird und wie viel Annuität (Entscheidungsvariable  $A_b$ ) an diesen Darlehensgeber gezahlt werden soll. Formal lässt sich das Optimierungsproblem des Darlehensnehmers mit dem Ziel, die Restschuld zu minimieren, unter Berücksichtigung der Darlehensgeber-Kalkulation gemäß Formel (1) wie folgt beschreiben:

<sup>19</sup> Um bei der Ausreichung von höheren Darlehenssummen auch einen höheren Barwert generieren zu können, kann es für einen Darlehensgeber sinnvoll sein, Klassen von Darlehenshöhen mit jeweils einem spezifischen zu erreichenden Barwert festzulegen. Bspw.  $C = 1.000$  für  $D \in [0; 200.000]$ ,  $C = 2.000$  für  $D \in [200.001; 500.000]$ , usw.

$$(2) \quad \min R = \min_{D_b, A_b, x_b} \sum_b R_{b,n} = \min_{D_b, A_b, x_b} \sum_b [x_b \cdot C_b \cdot s_{b,n} + D_b \cdot s_{b,n} - A_b \cdot r_{b,n} \cdot s_{b,n}]$$

mit den Nebenbedingungen

$$(3) \quad R_{b,n} \geq 0 \quad \forall b$$

$$(4) \quad x_b \in \{0;1\} \quad \forall b$$

$$(5) \quad D_b \leq D \cdot x_b$$

$$(6) \quad \sum_b D_b = D, \quad \sum_b A_b = A, \quad D_b \geq 0, \quad A_b \geq 0$$

Gemäß Annahme (A3) gilt die Darlehensgeber-Kalkulation nur unter der Nebenbedingung (3), dass sich eine nichtnegative Restschuld ergibt. Damit wird vermieden, dass ein sich ergebender negativer Darlehensstand (d.h. ein Guthabenstand) mit den Kalkulationszinssätzen (welche Risikoaufschläge, Eigenkapitalkosten, eine Marge etc. beinhalten können) als „Guthaben-Verzinsung“ verzinst wird. Die binären Variablen  $x_b \in \{0;1\} \quad \forall b$  sowie die Nebenbedingungen (4) und (5) sind notwendig, um zu berücksichtigen, dass ein Darlehensnehmer keine Restschuld in Höhe von  $C_b \cdot s_{b,n}$  zu bezahlen hat, wenn er mit Darlehensgeber  $b$  keinen Darlehensvertrag abschließt ( $D_b = A_b = 0$ ). Das vorliegende gemischt binäre Optimierungsproblem lässt sich bspw. mit Hilfe des Cutting-Plane Verfahrens von Gomory lösen.<sup>20</sup>

Bei der Durchführung der Optimierung ist jedoch Vorsicht geboten. Es besteht die Gefahr, dass der Darlehensnehmer eine suboptimale Lösung angeboten bekommt, wenn er eine relativ zur Darlehenshöhe hohe Annuität aufbringt: Dies ist dann der Fall, wenn Nebenbedingung (3) nur dadurch eingehalten werden kann, dass ein teurer Darlehensbestandteil unnötig hoch in einem Darlehensbündel gewichtet wird. Eine derartige Situation lässt sich leicht daran erkennen, dass sich nach Optimierung eine Gesamtrestschuld von exakt Null ergibt. Ist die Annuität sogar so hoch, dass die Restschuld bei jeder möglichen Aufteilung von Darlehenssumme und Annuität negativ ist, findet sich keine zulässige Lösung. In diesen Situationen kann dem Kunden empfohlen werden entweder die Annuität zu senken<sup>21</sup> und/oder die/das Darlehen in einer kürzeren Zeit als  $n$  vollständig zu tilgen. Rechnerisch sind dann zumindest solange Anpassungen durchzuführen, bis sich nach der Optimierung eine Gesamtrestschuld von infinitesimal über Null ergibt. Diese Problematik ist zwar bei der

<sup>20</sup> Vgl. (Burkard, 1972, S. 158ff.) bzw. (Gomory, 1960).

<sup>21</sup> Hierdurch gewinnt der Kunde mehr Freiraum bei seiner periodischen Liquiditätsplanung, reduziert aber nicht die insgesamt gezahlten Zinsen.

Anwendung der vorgestellten Optimierung in der Finanzierungsberatung zu beachten, zur Beantwortung der Forschungsfragen kann sie jedoch vernachlässigt werden.<sup>22</sup>

#### b. Optimierung bei zwei Darlehensangeboten

Wir werden nun die Problemstellung vereinfachen, analysieren und anschließend zeigen, dass die Analyseergebnisse auch für das Ausgangsoptimierungsproblem gelten. Wir beschränken uns zunächst auf zwei Darlehensgeber. Zudem vernachlässigen wir die Nebenbedingungen (4) und (5) und damit  $x_b$  in der Zielfunktion (2). Dies bewirkt, dass beide von den Darlehensgebern vorgegebenen Barwerte die Restschuld beeinflussen, auch wenn evtl. mit einem Darlehensgeber kein Darlehensvertrag abgeschlossen wird. Mit  $D_2 = D - D_1$  und  $A_2 = A - A_1$  ergibt sich als Zielfunktion

$$(7) \quad R^* = \underbrace{C_1 \cdot s_{1,n} + C_2 \cdot s_{2,n}}_a + \underbrace{D \cdot s_{2,n} - A \cdot r_{2,n} \cdot s_{2,n}}_b + \underbrace{D_1 \cdot (s_{1,n} - s_{2,n})}_c - \underbrace{A_1 \cdot (r_{1,n} \cdot s_{1,n} - r_{2,n} \cdot s_{2,n})}_d \rightarrow \min$$

Die vier mit den Buchstaben a) bis d) in Formel (7) gekennzeichneten Bestandteile der Gesamtrechtschuld lassen sich interpretieren als:

- a) Die Endwerte der von den beiden Darlehensgebern vorgegebenen Barwerte.
- b) Die Restschuld, wenn der Finanzierungsbedarf  $D$  vollständig über ein Darlehen bei Darlehensgeber 2 aufgenommen wird und auch die zur Verfügung stehende Annuität vollständig an diesen fließt.
- c) Die Restschuldveränderung, wenn ein Darlehensbetrag in Höhe  $D_1$  anstatt bei Darlehensgeber 2 bei Darlehensgeber 1 aufgenommen wird.
- d) Die Restschuldveränderung, wenn eine Annuität in Höhe von  $A_1$  anstatt an Darlehensgeber 2 an Darlehensgeber 1 bezahlt wird.

Die Darlehenshöhe und Annuität bei Darlehensgeber 1 sind optimal zu bestimmen. Dabei sind die Bestandteile a) und b) unabhängig von der Aufteilung auf die Darlehensgeber. Somit ist anhand einer Analyse der Bestandteile c) und d) ersichtlich, ob  $D_1$  und  $A_1$  tendenziell erhöht oder gesenkt werden sollten, um die Restschuld zu verringern. Diese Aussagen können getroffen werden, ohne dass der genaue Verlauf der Zinsstrukturkurve oder die Verläufe der zeitabhängigen Konditionsaufschläge (vgl. Annahme (A3)) der Banken bekannt sein müssen.

<sup>22</sup> Liegt eine Situation vor, in welcher durch die Optimierung suboptimale Ergebnisse erzielt werden, wird – wie oben beschrieben – die Ausgangssituation (exogene Variablen) solange angepasst, bis diese Problemsituation behoben ist. Die Analyseergebnisse beziehen sich auf das dann in diesem Sinne „korrekt“ formulierte Optimierungsproblem.

Lediglich die auf Basis der zeitabhängigen Kalkulationszinssätze ermittelten Rentenbarwert- und Rentenendwertfaktoren sowie die Spot-Rates  $(0,n)$  der beiden Darlehensgeber werden benötigt.<sup>23</sup>

Wie in Formel (1) ersichtlich, ergibt sich die Restschuld aus dem Endwert des Darlehensbetrages (zuzüglich dem Endwert des vorgegebenen Barwertes) abzüglich des Endwertes der Annuität. Ist bspw. bei Darlehensgeber 1 der Endwert eines Darlehensbetrages höher als bei Darlehensgeber 2 (es gilt  $s_{1,n} > s_{2,n}$ ), der restschuldreduzierende Endwert einer Annuität jedoch geringer als bei Darlehensgeber 2 (es gilt  $r_{1,n} \cdot s_{1,n} < r_{2,n} \cdot s_{2,n}$ ), so ist es im Vergleich der beiden Darlehensgeber weder sinnvoll bei Darlehensgeber 1 ein Darlehen aufzunehmen, noch an diesen eine Annuität zu bezahlen. Die niedrigste Restschuld wird erreicht, indem das Darlehen ausschließlich bei Darlehensgeber 2 aufgenommen wird und an diesen die Annuität fließt. Grafisch wird diese Situation in Abbildung 1 veranschaulicht, mathematisch ist das Vorliegen einer derartigen Situation anhand Formel (7) erkennbar: die Bestandteile c) und d) sind beide positiv.<sup>24</sup>

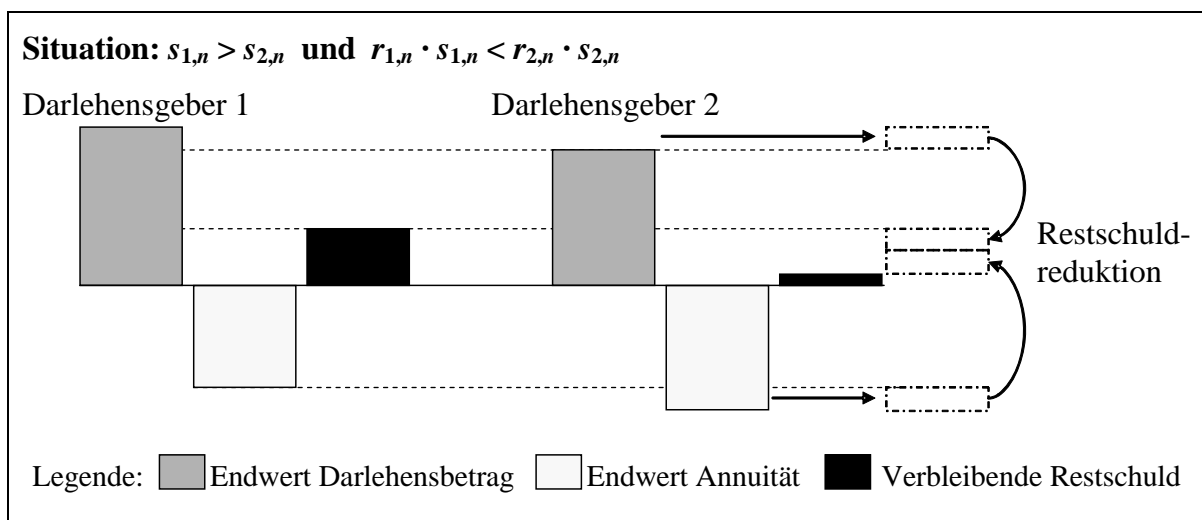


Abbildung 1: Restschuldvergleich bei identischem Darlehen und gleicher Annuität

<sup>23</sup> Es folgt eine ökonomisch-interpretative Diskussion der Optimierung. Eine formale Analyse der möglichen Parameterkonstellationen und der zugehörigen Optimierungsergebnisse kann dem mathematischen Anhang entnommen werden, der unter <http://www.wi-if.de/publikationen> zur Verfügung steht.

<sup>24</sup> Sind diese beiden Bestandteile beide negativ, wird analog Darlehensgeber 1 vorgezogen.

Eine Aufteilung von Darlehenshöhe und Annuität auf zwei Darlehensgeber erscheint dann sinnvoll, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (1) Ein Darlehensbetrag weist bei Darlehensgeber 1 einen niedrigeren Endwert auf als bei Darlehensgeber 2 und der (restschuldreduzierende) Endwert einer Annuität ist bei Darlehensgeber 2 größer als bei Darlehensgeber 1.
- (2) Ein Darlehensbetrag weist bei Darlehensgeber 2 einen niedrigeren Endwert auf als bei Darlehensgeber 1 und der (restschuldreduzierende) Endwert einer Annuität ist bei Darlehensgeber 1 größer als bei Darlehensgeber 2.

Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf Bedingung (1), gelten für Bedingung (2) jedoch analog. Die Zahlung der vollen Annuität an Darlehensgeber 2 ohne ein Darlehen aufzunehmen ist wegen der Nebenbedingung, dass sich keine negative Restschuld ergeben darf, nicht möglich. Im Optimum wird somit Nebenbedingung (3) bindend und es muss zumindest der Betrag  $D_2 = A_2 \cdot r_{2,n} - C_2 = (A - A_1) \cdot r_{2,n} - C_2$  bei Darlehensgeber 2 aufgenommen werden, so dass sich am Ende der Zinsbindungsdauer bei diesem Darlehen eine Restschuld von exakt Null ergibt.

Es stellt sich die Frage, ob bei bindender Nebenbedingung (3) nach wie vor an Darlehensgeber 2 eine möglichst hohe Annuität bezahlt werden sollte. Bei einem Darlehen, welches bis zum Ende der Zinsbindungsdauer vollständig zurückbezahlt wird, erhält der Kunde für jeden zusätzlichen Euro Annuität einen Betrag von  $r_{2,n}$  Euro, d.h. den Rentenbarwert, als zusätzliches Darlehen. Für den Kunden ist es somit optimal, die Annuität an den Darlehensgeber zu bezahlen, bei welchem er dafür den größten Darlehensbetrag erhält.<sup>25</sup> Der noch fehlende Darlehensbetrag sollte bei dem Darlehensgeber aufgenommen werden, bei welchem sich bei einem zins- und tilgungsfreien Darlehen der niedrigste Endwert als Restschuld ergibt, d.h. der die niedrigste Spot-Rate  $(0,n)$  aufweist. Somit ist es nur dann optimal, an Darlehensgeber 2 die volle Annuität zu bezahlen und damit ein Darlehensbündel zu vereinbaren, wenn  $r_{2,n} > r_{1,n}$  gilt. Die Gesamtrestschild des Darlehensbündels entspricht dann der Restschuld des bei Darlehensgeber 1 aufgenommenen zins- und tilgungsfreien Darlehens. Gilt hingegen  $r_{2,n} < r_{1,n}$ , überwiegt bei Darlehensgeber 2 der Nachteil einer Darlehensaufnahme den Vorteil durch den höheren Endwert der Annuität und es ist lediglich bei Darlehensgeber 1 ein Darlehen aufzunehmen.

---

<sup>25</sup> Dies lässt sich in der hier untersuchten, vereinfachten Problemstellung allein anhand der Rentenbarwertfaktoren entscheiden. Die vorgegebenen Barwerte sind zunächst nicht zu beachten, da sie unabhängig von der Aufteilung von Annuität und Darlehenshöhe auf ein oder zwei Darlehensgeber beide zu tragen sind.

Entsprechen sich entweder die Rentenbarwertfaktoren oder die Spot-Rates  $(0,n)$ , so ist nur das Darlehen, welches hinsichtlich einem der zwei Einflussfaktoren auf die Gesamtrestschuld einen Vorteil aufweist, aufzunehmen. Entsprechen sich sowohl die Rentenbarwertfaktoren als auch die Spot-Rates  $(0,n)$ , so ergibt sich unabhängig von der Aufteilung der Darlehenshöhe und Annuität auf die Darlehensgeber immer der gleiche Wert der vereinfachten Zielfunktion (vgl. Formel (7)); bei dieser wird von genau zwei Anbietern am Markt ausgegangen).

Tabelle 1 gibt einen Überblick über die möglichen Konstellationen und die jeweiligen Optimierungsergebnisse. Konstellationen, in denen ein Darlehensbündel optimal ist, sind grau hinterlegt.

Tabelle 1: Optimierungsergebnisse bei vereinfachter Zielfunktion

Konstellationen	c) positiv: $s_{1,n} > s_{2,n}$	c) negativ: $s_{1,n} < s_{2,n}$	c) null: $s_{1,n} = s_{2,n}$
$r_{1,n} < r_{2,n}$	$D_1 = 0; D_2 = D$ $A_1 = 0; A_2 = A$	$D_1 = C_2 + D - A \cdot r_{2,n}$ $D_2 = D - D_1 = Ar_{2,n} - C_2$ $A_1 = 0; A_2 = A$	$D_1 = 0; D_2 = D$ $A_1 = 0; A_2 = A$
$r_{1,n} > r_{2,n}$	$D_1 = A \cdot r_{1,n} - C_1$ $D_2 = C_1 + D - A \cdot r_{1,n}$ $A_1 = A; A_2 = 0$	$D_1 = D; D_2 = 0$ $A_1 = A; A_2 = 0$	$D_1 = D; D_2 = 0$ $A_1 = A; A_2 = 0$
$r_{1,n} = r_{2,n}$	$D_1 = 0; D_2 = D$ $A_1 = 0; A_2 = A$	$D_1 = D; D_2 = 0$ $A_1 = A; A_2 = 0$	Aufteilung beliebig

Bislang wurde ein vereinfachtes Optimierungsproblem mit lediglich zwei Darlehensgebern betrachtet. Zudem muss der geforderte Barwert an beide Darlehensgeber gezahlt werden, auch wenn nur bei einem der beiden Anbieter ein Darlehen aufgenommen wird. Daher ergeben sich zwei Folgefragen:

1. Inwiefern lassen sich diese Ergebnisse nun auf das tatsächliche – nicht vereinfachte – Optimierungsproblem, in welchem der vorgegebene Barwert eines Darlehensgeber entfällt, wenn bei diesem kein Darlehen aufgenommen wird, übertragen?
2. Welche Aussagen lassen sich für das Optimierungsproblem bei mehr als zwei Darlehensgebern ableiten?

Bisher wurde festgestellt, dass ein Darlehensbündel nur dann optimal ist, wenn gilt

$$(8) \quad s_{i,n} > s_{j,n} \text{ und } r_{i,n} > r_{j,n}, \quad i, j \in \{1,2\}, i \neq j.$$

Diese Bedingung ist auch dann, wenn ein vorgegebener Barwert durch Weglassen eines



Darlehens eingespart werden kann, notwendig damit ein Darlehensbündel optimal sein kann, aber nicht mehr hinreichend. Zusätzlich ist nun zu prüfen, ob die Gesamtrestschild des Darlehensbündels (d.h. die Restschuld des zins- und tilgungsfreien Darlehens) niedriger ist, als wenn die beste Ein-Darlehen-Lösung gewählt wird. Die beste Ein-Darlehen-Lösung ist jedoch nicht mehr allein anhand der  $r_i, s_i$  identifizierbar. Selbst im Falle  $r_{1,n} < r_{2,n}$  und  $s_{1,n} > s_{2,n}$ <sup>26</sup> kann eine alleinige Darlehensaufnahme bei Darlehensgeber 1 besser sein, falls der vorgegebene Barwert von Darlehensgeber 1 deutlich niedriger als der von Darlehensgeber 2 ist. Die optimale Lösung lässt sich somit durch Vergleich der Restschuld im Darlehensbündel (falls Bedingung (8) erfüllt ist) mit der Restschuld jeder Ein-Darlehen-Lösung ermitteln.

### c. Optimierung bei mehr als zwei Darlehensangeboten

Werden mehr als zwei Darlehensgeber in die Optimierung einbezogen, stellt sich zunächst die Frage, aus wie vielen Darlehen ein optimales Darlehensbündel (maximal) besteht. Mit Hilfe der bisherigen Erkenntnisse lässt sich dies leicht beantworten. Werden  $B$  Darlehensgeber in der obigen, vereinfachten Analyse berücksichtigt (d.h. alle vorgegebenen Barwerte beeinflussen die Restschuld) und ist Bedingung (8) erfüllt, so ist wie folgt vorzugehen:

1. Zahle die volle Annuität an den Darlehensgeber mit dem höchsten Rentenbarwertfaktor und lege die Darlehenshöhe so fest, dass das Darlehen am Ende der gegebenen Zinsbindungsfrist auf Null zurückgeführt ist.
2. Nehme den restlichen Darlehensbetrag bei dem Darlehensgeber mit der niedrigsten Spot-Rate  $(0,n)$  zins- und tilgungsfrei auf.

Dies kann maximal zwei unterschiedliche Darlehensgeber betreffen. Das optimale Darlehensbündel besteht somit auch bei  $B$  Darlehensangeboten maximal aus zwei Darlehen.

In der tatsächlichen – nicht vereinfachten – Problemstellung ist jedoch nicht allein anhand der  $s_i$  und  $r_i$  ablesbar, welche zwei Darlehen der  $B$  Darlehensangebote das beste Bündel bilden.

Das restschuldminimale Darlehensbündel lässt sich wie folgt ermitteln:

1. Selektiere den Darlehensgeber  $b_A$ , welcher unter Berücksichtigung des vorgegebenen Barwerts den höchsten Darlehensbetrag für die Gesamtannuität bezahlt, d.h. es gilt  $A \cdot r_{b_A,n} - C_{b_A} = \max_b (A \cdot r_{b,n} - C_b)$ . Hierbei kann sich ein Darlehensgeber ergeben, welcher nicht den höchsten Rentenbarwertfaktor aber dafür einen – vergleichsweise – niedrigen vorgegebenen Barwert aufweist. Lege die Darlehenshöhe so fest, dass das

<sup>26</sup> D.h. jeder Euro Darlehen bei Darlehensgeber 1 erhöht die Restschuld stärker als bei Darlehensgeber 2 und jeder Euro Annuität an Darlehensgeber 1 senkt die Restschuld weniger stark als bei Darlehensgeber 2.

Darlehen am Ende der gegebenen Zinsbindungsfrist auf Null zurückgeführt ist.

2. Selektiere den Darlehensgeber  $b_D$ , bei welchem ein zins- und tilgungsfreies Darlehen in Höhe des verbleibenden, benötigten Restbetrags vom ersten Schritt – wiederum unter Berücksichtigung des vorgegebenen Barwerts – die niedrigste Restschuld aufweist, d.h. es gilt

$$(D - A \cdot r_{b_A, n} + C_{b_A} + C_{b_D}) \cdot s_{b_D, n} = \min_{b \neq b_A} (D - A \cdot r_{b_A, n} + C_{b_A} + C_b) \cdot s_{b, n}. \text{ Der sich}$$

ergebende Darlehensgeber  $b_D$  muss wiederum nicht der Darlehensgeber mit der niedrigsten Spot-Rate  $(0, n)$  sein.

Es ergibt sich aus den beiden Darlehen der Anbieter  $b_A$  und  $b_D$  das bestmögliche (restschuldminimale) Darlehensbündel.

3. Abschließend ist zu prüfen, ob die Restschuld des besten Darlehensbündels geringer ist als die Restschuld der besten Ein-Darlehen-Lösung des mit  $b_E$  bezeichneten Anbieters<sup>27</sup> mit

$$C_{b_E} \cdot s_{b_E, n} + D \cdot s_{b_E, n} - A \cdot r_{b_E, n} \cdot s_{b_E, n} = \min_b (C_b \cdot s_{b, n} + D \cdot s_{b, n} - A \cdot r_{b, n} \cdot s_{b, n}).$$

Weist das Darlehensbündel die geringste Restschuld auf, so ist dies die optimale Lösung, andernfalls die Ein-Darlehen-Lösung von Anbieter  $b_E$ . Auch hier ist Bedingung (8) also eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung dafür, dass das Darlehensbündel optimal ist.

Somit wurde mit den eben dargestellten Schritten ein Vorgehen zur Lösung des mit den Formeln (2)-(6) beschriebenen Optimierungsproblems vorgestellt, welches alternativ zum Cutting-Plane-Verfahren verwendet werden kann, in vielen Fällen schneller zum Optimierungsergebnis führt und eine ökonomische Interpretation ermöglicht hat. Das Vorgehen wird auf Basis der Kundensituation von Beispiel 1 im folgenden Beispiel veranschaulicht.

*Beispiel 2: Auf dem Kapitalmarkt sei eine lineare Zinsstrukturkurve ableitbar mit  $i_t = 0,045 + 0,003 \cdot t$ . Am Markt sind zwei Darlehensgeber vertreten, welche gemäß Formel (1) bei festgelegtem  $n = 10$  sowie den folgenden Angaben kalkulieren.*

	<i>Bank 1</i>	<i>Bank 2</i>
<i>Zeitabhängige Aufschläge</i>	$c_{1,t} = 0,0072 + 0 \cdot t$	$c_{2,t} = 0,032 + (-0,003) \cdot t$
<i>Vorgegebener Barwert</i>	<i>200 Euro</i>	<i>0 Euro</i>
<i>Spot-Rate (0,10)</i>	$s_{1,10} = 2,20$	$s_{2,10} = 2,10$
<i>Rentenbarwertfaktoren</i>	$r_{1,10} = 6,97$	$r_{2,10} = 6,80$
<i>Rentenendwertfaktoren</i>	$r_{1,10} \cdot s_{1,10} = 15,35$	$r_{2,10} \cdot s_{2,10} = 14,28$

<sup>27</sup> Man beachte dass  $b_E = b_A$  oder  $b_E = b_D$  gelten kann.

Die sich ergebenden, zeitabhängigen Kalkulationszinssätze für unterschiedliche Zeitpunkte sind in Abbildung 2 dargestellt.

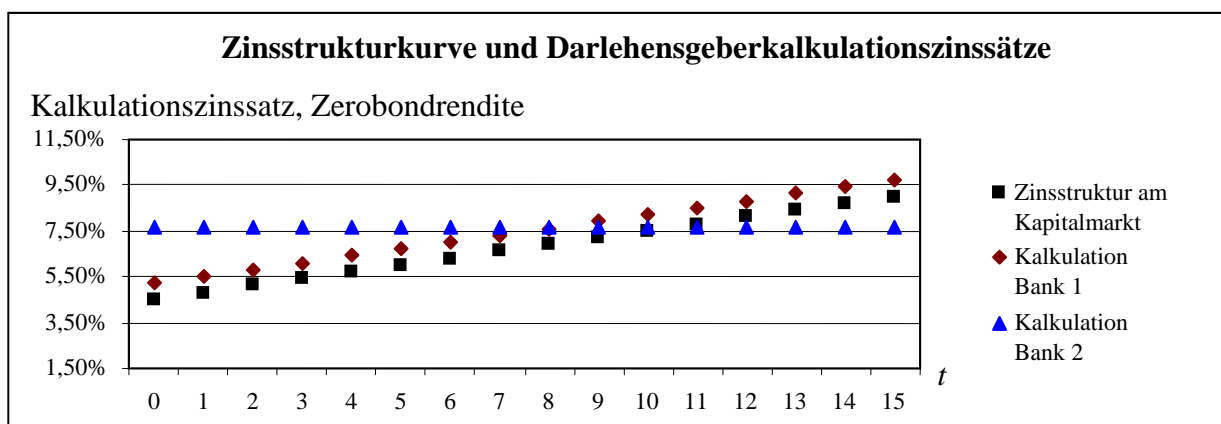


Abbildung 2: Zeitabhängige Kalkulationszinssätze aus Beispiel 2

Die Differenzen der Endwertfaktoren, Rentenbarwertfaktoren und der Rentenendwertfaktoren von Bank 1 und 2 sind alle positiv. Dies wird auch aus Abbildung 2 deutlich, da sich die Kalkulationszinssatzfunktionen der beiden Anbieter schneiden. Es liegt somit die Konstellation  $r_{1,n} > r_{2,n} \wedge s_{1,n} > s_{2,n}$  vor und ein Darlehensbündel könnte optimal sein. Der Vergleich mit den Restschulden, die sich ergeben würden, wenn der Finanzierungsbedarf vollständig bei jeweils einem der beiden Banken aufgenommen würde zeigt, dass das Darlehensbündel in diesem Fall die optimale Entscheidung ist und eine um 6.304 Euro niedrigere Restschuld als die beste Ein-Darlehen-Lösung aufweist.<sup>28</sup>

	Bank 1	Bank 2
Annuität Ein-Darlehens-Lösung	20.000 Euro	20.000 Euro
Darlehenshöhe Ein-Darlehens-Lösung	200.000 Euro	200.000 Euro
Restschuld Ein-Darlehens-Lösung	134.041 Euro	134.304 Euro
(optimale) Annuität Darlehensbündel	$A_1 = A = 20.000$ Euro	$A_2 = 0$ Euro
(optimale) Darlehenshöhe Darlehensbündel	$D_1 = A \cdot r_{1,n} - C_1$ = 139.164 Euro	$D_2 = C_1 + D - A \cdot r_{1,n}$ = 60.836 Euro
Restschuld Einzeldarlehen	0 Euro	127.737 Euro
Restschuld Darlehensbündel	127.737 Euro	

<sup>28</sup> Wird das Darlehen bei Bank 2 lediglich als tilgungsfreies – aber nicht zinsfreies – Darlehen angeboten, so ergibt sich mit einer Restschuld von 131.268 Euro immerhin noch ein Restschuldvorteil von 2.773 Euro im Vergleich zur besten Ein-Darlehen-Lösung.

### 3. Diskussion

Auf Basis der bisherigen Ergebnisse lassen sich nun die beiden Forschungsfragen beantworten.

#### *1. In welchen Situationen der Darlehensgeber-Kalkulation ergibt sich für den Darlehensnehmer ein Darlehensbündel als optimale Lösung?*

Es gibt zwei Situationen, in denen sich ein Darlehensbündel als optimale Lösung ergeben kann: Entweder die Differenz der Spot-Rates  $(0,n)$  und die Differenz der Rentenbarwertfaktoren im Vergleich von zwei Darlehensgebern sind beide negativ oder beide positiv (vgl. Bedingung (8)). In diesen Situationen ist folglich auch die Differenz der Rentenendwertfaktoren negativ oder positiv. Das heißt, als optimale Lösung können Darlehensbündel zustande kommen, wenn mindestens einer der  $B$  Darlehensgeber Annuitäten barwertig und endwertig sowie eine anfängliche einmalige Zahlung endwertig niedriger bewertet als mindestens ein anderer der  $B$  Darlehensgeber. Zudem muss der Restschuldvorteil des Darlehensbündels gegenüber dem besten einzelnen Darlehen größer sein als der Endwert des im Darlehensbündel zusätzlich zu berücksichtigenden, vorgegebenen Barwerts des zweiten Darlehensgebers.

Liegen – beim Vergleich von jeweils zwei der Darlehensanbieter – die zeitabhängigen Kalkulationszinssätze des ersten Darlehensgebers immer über den Kalkulationszinssätzen des Zweiten, so ist die Differenz der Spot-Rates  $(0,n)$  positiv, die Differenz der Rentenbarwertfaktoren jedoch negativ. D.h. in dieser Konstellation erhöht ein aufgenommener Darlehens-Euro die Restschuld beim ersten Darlehensgeber mehr als beim zweiten Darlehensgeber und gleichzeitig vermindert ein Euro Annuität die Restschuld in der Regel weniger stark als beim zweiten Darlehensgeber. Und selbst wenn eine Annuität an den ersten Darlehensgeber die Restschuld stärker reduzieren sollte als eine Annuität an den zweiten Darlehensgeber (Differenz der Rentenendwertfaktoren ist positiv), ist dieser Effekt im Allgemeinen zu gering, um den Endwertnachteil eines beim ersten Darlehensgeber aufgenommen Darlehen aufzuwiegen. Somit lässt sich das folgende Ergebnis festhalten.

*Ergebnis 1: Darlehensbündel können sich als optimale Lösung nur dann ergeben, wenn sich die Kalkulationszinssatzfunktionen zweier Darlehensgeber mindestens einmal schneiden. Ansonsten ergeben sich immer Ein-Darlehens-Lösungen als optimale Lösung. Ist ein Darlehensbündel optimal, werden sowohl der Darlehensnehmer als auch die Koalition der*

*Darlehensgeber besser gestellt als in einer Ein-Darlehen-Lösung, als wenn einer der Darlehensgeber eine Ein-Darlehen-Lösung angeboten hätte.<sup>29</sup>*

2. *Welches ist die optimale Aufteilung der Darlehenshöhe und Annuität auf die Darlehensgeber, falls ein Darlehensbündel optimal ist?*

Überwiegt bei einem Darlehensgeber der Restschuldvorteil durch die Annuität einen vorhandenen Restschuldnachteil durch eine Darlehensaufnahme, so sollte die Annuität bei diesem Darlehensgeber so hoch wie möglich und das Darlehen so niedrig wie möglich gewählt werden. Im Optimum ergibt sich, dass die gesamte zur Verfügung stehende Annuität an diesen Darlehensgeber gezahlt wird und gerade soviel Darlehen aufgenommen wird, dass sich am Ende der geplanten Zinsbindungsfrist eine Restschuld von Null ergibt – man spricht dann von einem so genannten Volltilgerdarlehen – und damit die Nebenbedingung einer nichtnegativen Restschuld genau erfüllt ist. Das zweite Darlehen im Bündel ist dementsprechend zins- und tilgungsfrei zu vereinbaren.

*Ergebnis 2: Ergibt sich als Optimum ein Darlehensbündel, so besteht dieses aus einem zins- und tilgungsfreien Darlehen und einem Darlehen, welches durch die Annuität am Ende der Zinsbindungsdauer vollständig getilgt ist.*

Zudem lässt sich (zumindest) bei monoton steigenden Kalkulationszinssatzfunktionen der Darlehensgeber zeigen, dass im Fall eines Darlehensbündels als optimale Lösung die Annuität vollständig in das „günstigere“ Darlehen mit dem niedrigeren Nominalzinssatz fließt. Das „teurere“ Darlehen mit dem höheren Nominalzinssatz ist ein zins- und tilgungsfreies Darlehen. Auf den ersten Blick mag dies vielleicht irrational erscheinen, dass das „günstigere“ Darlehen schnellstmöglich zurückbezahlt wird und nicht das „teurere“. Das „günstigere“ Darlehen ist aber gerade wegen der hohen Annuität so „günstig“ und führt so zur Optimalität des Darlehensbündels.

Bestehen weitere Nebenbedingungen wie bspw., dass nur ein tilgungsfreies aber kein zins- und tilgungsfreies Darlehen vereinbart werden kann, so muss die Annuität an den Darlehensgeber, welcher die volle Annuität bekommen sollte, reduziert werden, wodurch aber auch die Darlehenshöhe bei diesem gesenkt werden kann. Der Restschuldvorteil der Bündellösung gegenüber einer Ein-Darlehens-Lösung reduziert sich durch die zusätzliche

---

<sup>29</sup> Ist bei den Darlehensgebern im Kalkulationszinssatz jedoch eine Gewinnmarge enthalten, so kann hierüber keine eindeutige Aussage getroffen werden.

Restriktion (vgl. Fußnote bei Beispiel 2).

#### **IV.Fazit und Ausblick**

Im vorliegenden Beitrag wird eine Gefahr in der derzeitigen Praxis der Immobilienfinanzierungsberatung für private Eigennutzer aufgezeigt: Sind die Nominalzinssätze von Darlehen – wie häufig vorzufinden – abhängig von der Darlehenshöhe und der geleisteten Annuität, so kann die Empfehlung des isoliert betrachtet günstigsten Darlehens systematisch zu einer unnötig hohen Restschuld am Ende der Zinsbindungsdauer führen und statt dessen ein Darlehensbündel optimal sein.

Die Besonderheiten in der privaten Immobilienfinanzierung wie Fixkostendegressionsvorteile bei Darlehensgebern oder vertragliche Beschränkungen machen eine separate Analyse im Vergleich zur existierenden Forschung über Kapitalmärkte notwendig. Die Analyse ergibt für unterschiedliche Konstellationen von Darlehensgeber-Kalkulationen jeweils die optimale Aufteilung der Darlehenshöhe und Annuität und zeigt für den Fall optimaler Darlehensbündel, dass diese aus einem zins- und tilgungsfreien Darlehen und einem Darlehen, welches durch die volle Annuität am Ende der Zinsbindungsdauer getilgt ist, bestehen. Dabei fließt im Optimum die volle Annuität nicht etwa in das Darlehen mit dem höheren, sondern grundsätzlich in das Darlehen mit dem niedrigeren Nominalzinssatz. Die Kalkulationszinssatzfunktionen der zugehörigen Darlehensgeber vom Zeitpunkt Null bis zum Ende der Zinsbindungsdauer schneiden sich in einer solchen Situation mindestens einmal. Dies ist nicht ungewöhnlich, sondern kann in der Praxis beobachtet werden und wurde im Beitrag auch theoretisch begründet.

Durch die praktische Realisierung der diskutierten Optimierung in Beratungssystemen von Finanzdienstleistern kann Kunden damit potenziell ein günstigeres Angebot offeriert werden – mit positiven erwarteten Auswirkungen auf Kundenbindung und Wettbewerbsfähigkeit. Gerade Online-Finanzintermediäre sind dabei in der herausgehobenen Position, diese Optimierungspotenziale für Nachfrager nach Immobilienfinanzierungen zu nutzen, liegen doch die Kalkulationsgrundlagen aller an eine solche Vergleichsplattform angeschlossenen Anbieter im Rechenkern vor. Derzeit wird diese Funktionalität jedoch noch von keiner Vergleichsplattform angeboten, so dass die Erkenntnisse des Beitrags den Kunden nahe legen, sich bei mehreren Banken Angebote zu unterschiedlichen Aufteilungen von Darlehenshöhe und Annuität einzuholen. Auch so kann – mehr oder weniger zielgenau – ein vorteilhaftes

Darlehensbündel identifiziert werden. Dabei geht die Minimierung der Restschuld bei Berücksichtigung einer barwertneutralen Darlehensgeber-Kalkulation nicht zu Lasten des bzw. der Darlehensgeber. Im Gegenteil: Werden Darlehensbündel anstatt Ein-Darlehens-Lösungen abgeschlossen, kann ein zweiter Darlehensgeber seinen vorgegebenen Barwert realisieren und es entsteht ein Vorteil für die Koalition aus Kunden und Darlehensgebern. Der Vorteil für die Darlehensgeberkoalition erhöht sich, wenn die Optimierungsvorteile nicht vollständig an den Kunden weitergegeben werden.

Die im Beitrag vorgestellten Optimierungsmöglichkeiten berücksichtigen, dass in der Praxis derzeit nahezu ausschließlich Immobilienfinanzierungen mit regelmäßigen Annuitätenzahlungen abgeschlossen werden. Die Optimierungspotenziale erhöhen sich jedoch, wenn flexiblere Vertragsgestaltungen – z.B. die Vereinbarung beliebiger zins- und tilgungsfreier Zeiträume innerhalb der Vertragslaufzeit – angeboten werden.<sup>30</sup>

Auf Basis des vorliegenden Beitrags ergeben sich zahlreiche Ansatzpunkte für weitere Analysen. Dies betrifft zum Beispiel die Berücksichtigung von Bausparverträgen oder endfälligen Darlehen mit Tilgungsersatz, die Wahl eines optimalen Zinsbindungszeitraums oder die Integration von Forward-Darlehen in die Finanzierung. Hierfür kann der vorliegende Beitrag als ein möglicher Ausgangspunkt dienen.

## **Literatur**

- Brückner, Michael/Lücke, Franz (2004): Immobilienfinanzierung ohne Fallen. Frankfurt am Main, 2004.
- Buhl, Hans Ulrich/Hinrichs, Jens-Werner/Satzger, Gerhard/Schneider, Jochen (1999): Leasing selbstgenutzter Wohnimmobilien. In: Die Betriebswirtschaft, 59. Jg. (1999), S.316-331.
- Buhl, Hans Ulrich/Kundisch, Dennis/Steck, Werner (2002): Sophistication Banking als erfolgreiche Strategie im Informationszeitalter. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 72. Jg. (2002), Ergänzungsheft 2, S.1-12.
- Buhl, Hans Ulrich/Dzienziol, Jochen/Eberhardt, Michael/Kundisch, Dennis (2005): IT-unterstützte Beratungsintensivierung in der privaten Immobilienfinanzierung. In: Petzel,

---

<sup>30</sup> Aus Abbildung 3 in Beispiel 2 ist erkennbar, dass bis einschließlich  $t = 8$  Darlehensgeber 1 einen niedrigeren Kalkulationszinssatz aufweist als Darlehensgeber 2. Die Kalkulationszinssätze zu den Zeitpunkten  $t = 9$  und  $t = 10$  und damit auch die Spot-Rate  $(0, n)$  sind jedoch höher als bei Darlehensgeber 2. Wäre eine flexible Gestaltung möglich, so sollte der Kunde die ersten 8 Annuitätenzahlungen an Darlehensgeber 1 leisten und danach keine weiteren Zahlungen. Der verbleibende Darlehensbetrag wird bei Darlehensgeber 2 aufgenommen, 8 zins- und tilgungsfreie Anfangsjahre vereinbart und die 9. und 10. Annuität an diesen geleistet. Die sich ergebende Restschuld wäre im Vergleich zu Beispiel 3 um weitere 1.332 Euro niedriger.

- Erhard (Hrsg.): E-Finance - Technologien, Strategien und Geschäftsmodelle. Wiesbaden 2005, S. 669-706.
- Burkard, Rainer (1972): Methoden der Ganzzahligen Optimierung. Wien, 1972.
- Deutsche Bundesbank (2007): Monatsbericht September 2007, Vol. 59 (2007), Nr. 9, Statistisches Beiheft, S. 32ff.
- Douna, H./Low, Simon/Dübel, Achim (2007): European mortgage distribution. Changing channel choices. Studie von Oliver Wyman, Fortis und EFMA, 2007.
- Gaida, Stefan/Homölle, Susanne/Pfingsten, Andreas (1996): Das Marktzinsmodell in der Bankkalkulation. Diskussionspapier DB 96-01, Universität Münster, 1996.
- Gomory, R. E. (1960): An algorithm for the mixed integer problem. Technical Report RM-2597-PR, The RAND Corporation, 1960.
- Hölting, Michael (2004): WISO Immobilienfinanzierung. 2. Aufl., Frankfurt am Main, 2004.
- Iblher, Felix (2003): Internetbasierte Immobilienfinanzierung. Köln, 2003.
- Locarek-Junge, Hermann (1997): Finanzmathematik: Lehr- und Übungsbuch. 3. Aufl., München, 1997.
- Opitz, Otto (2004): Mathematik: Lehrbuch für Ökonomen. 9. Aufl., München, 2004.
- Schaefer, Stephen M. (1981): Measuring a Tax-Specific Term Structure of Interest Rates in the Market for British Government Securities. In: Economic Journal, Vol. 91 (1981), No. 362, S. 415-438.
- Schaefer, Stephen M. (1982a): Tax-induced Clientele Effects in the Market for British Government Securities. In: Journal of Financial Economics, Vol. 10 (1982), pp. 121-159.
- Schaefer, Stephen M. (1982b): Taxes and Security Market Equilibrium. In: Cootner, Paul H./ Sharpe, William F./ Cootner, Cathryn M. (Hrsg.): Financial Economics: Essays in Honor of Paul H. Cootner, S. 159-178.
- Schierenbeck, Henner (2003): Ertragsorientiertes Bankmanagement Band 1: Grundlagen, Marktzinsmethode und Rentabilitäts-Controlling. 8. Aufl., Wiesbaden, 2003.
- Schöpe, Britta (2000): Immobilienfinanzierung: Betriebswirtschaftliche Vorteilhaftigkeitsanalyse unter besonderer Berücksichtigung steuerlicher Aspekte. Lohmar, 2000.
- Schulze, Eike/Stein, Anette (2004): Die optimale Immobilienfinanzierung. 2. Aufl., Freiburg im Breisgau, 2004.
- Stiftung Warentest (2003): Baufinanzierung: Schlecht beraten. In: Finanztest, (2003) Heft 4, S. 12-17.
- Weil, M./Wyles, T./Bridge, P. (2003): Retail Banking in Europe. Markets and Management. Mercer Oliver Wyman, 2003.



Wöhle, Claudia (2005): Kapitalwertorientierte Kreditkalkulation. In: Die Betriebswirtschaft, 65. Jg. (2005), S. 276-293.

Wolfersberger, Peter (2002): Individualisierung von Finanzdienstleistungen – die optimale Disagiovariante eines Festdarlehens. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 72. Jg. (2002), S. 573-591.

## Mathematischer/analytischer Anhang

### Anhang 1: Ausführliche Analyse möglicher Parameterkonstellationen und Optimierungsergebnisse für das vereinfachte Optimierungsproblem in Abschnitt 3.2

$$\begin{aligned} \text{Zielfunktion: } R^* = & \underbrace{C_1 \cdot s_{1,n} + C_2 \cdot s_{2,n}}_{\text{a)}} + \underbrace{D \cdot s_{2,n} - A \cdot r_{2,n} \cdot s_{2,n}}_{\text{b)}} + \underbrace{D_1 \cdot (s_{1,n} - s_{2,n})}_{\text{c)}} \\ & - \underbrace{A_1 \cdot (r_{1,n} \cdot s_{1,n} - r_{2,n} \cdot s_{2,n})}_{\text{d)}} \rightarrow \min \end{aligned}$$

*Konstellation 1a,*

*c) ist positiv und d) ist positiv ( $s_{1,n} > s_{2,n}$  und  $r_{1,n} \cdot s_{1,n} < r_{2,n} \cdot s_{2,n}$ ):*

Hier ist der Endwert eines bei DG 1 aufgenommenen Euro in der Darlehensgeberkalkulation höher als bei DG 2. D.h. DG 1 würde einen zins- und tilgungsfreien Kredit teurer anbieten.

Gleichzeitig reduziert der Endwert einer an DG 1 gezahlten Annuität in Höhe von einem Euro die geforderte Restschuld weniger stark als ein an DG 2 gezahlter Euro Annuität, weshalb die Restschuld mit zunehmender Annuität  $A_1$  steigt. Somit hat der DN den Anreiz, bei DG 1 / DG 2 sowohl einen möglichst niedrigen / hohen Darlehensbetrag aufzunehmen als auch eine möglichst niedrige / hohe Annuität zu bezahlen. Das Optimierungsergebnis ist

$D_1 = 0; D_2 = D; A_1 = 0; A_2 = A$ . Entsprechen sich die Endwertfaktoren ( $s_{1,n} - s_{2,n} = 0$ ), so

ergibt sich nach wie vor  $A_1 = 0; A_2 = A$ . Die Darlehenshöhe könnte jedoch beliebig – unter Beachtung der Nebenbedingung (3) – auf die DG aufgeteilt werden, ohne dass sich der Wert der angepassten Zielfunktion (7) verändert. Allerdings wird für  $D_1 > 0$  ein zweiter

Darlehensvertrag abgeschlossen, was bedeutet, dass der Kunden in der tatsächlichen Zielfunktion implizit über die vereinbarten Konditionen den zusätzlichen Barwert  $C_1$

bezahlen müsste. Somit ist die Aufteilung der Darlehenshöhe nicht empfehlenswert und es

ergibt sich  $D_1 = 0; D_2 = D$ . Entsprechen sich die Rentenendwertfaktoren ( $r_{1,n} \cdot s_{1,n} = r_{2,n} \cdot s_{2,n}$ ),

so ist die optimale Aufteilung der Darlehenshöhe  $D_1 = 0; D_2 = D$  und die Annuität könnte

wiederum unter Beachtung von Nebenbedingung (3) beliebig auf die DG aufgeteilt werden,

wobei mit der Festlegung von  $A_1 = 0; A_2 = A$  nur ein Darlehensvertrag abgeschlossen werden muss.

*Konstellation 1b,*

*c) ist negativ und d) ist negativ ( $s_{1,n} < s_{2,n}$  und  $r_{1,n} \cdot s_{1,n} > r_{2,n} \cdot s_{2,n}$ ):*

Das Optimierungsvorgehen und die getroffenen Aussagen entsprechen denen von Konstellation 1a mit dem Unterschied, dass nun DG 1 vorzuziehen ist, d.h.

$D_1 = D; D_2 = 0; A_1 = A; A_2 = 0$ . Dies gilt wiederum auch dann, wenn sich die Endwertfaktoren oder die Rentenendwertfaktoren der DG entsprechen, da bei gegebener Indifferenz bei der Aufteilung von  $D$  oder  $A$  auf die DG bezüglich Zielfunktion (2) mit dieser Aufteilung der Abschluss eines zweiten Darlehensvertrages vermieden werden kann.

*Konstellation 2a,*

*c) ist negativ und d) ist positiv ( $s_{1,n} < s_{2,n}$  und  $r_{1,n} \cdot s_{1,n} < r_{2,n} \cdot s_{2,n}$ ):*

Hier ist der Endwert eines bei DG 1 aufgenommenen Euro niedriger als bei DG 2. D.h. ein zins- und tilgungsfreier Kredit wäre bei DG 1 günstiger. Gleichzeitig reduziert aber der Endwert einer an DG 1 gezahlten Annuität in Höhe von einem Euro die Restschuld weniger als eine an DG 2 gezahlte Annuität von einem Euro: eine Annuität an DG 1 erhöht die Restschuld. Umgekehrt heißt dies, dass bei DG 2 zwar ein möglichst niedriges Darlehen aufgenommen jedoch eine möglichst hohe Annuität bezahlt werden soll. Dies steht im Konflikt mit der Voraussetzung, dass sich bei beiden Darlehen eine nichtnegative Restschuld am Ende der Zinsbindungsdauer ergibt, weshalb Nebenbedingung (3) im Optimum für DG 2 bindend sein wird, d.h. es gilt

$$(14) \quad R_2 = C_2 \cdot s_{2,n} + (D - D_1) \cdot s_{2,n} - (A - A_1) \cdot r_{2,n} \cdot s_{2,n} = 0 \Leftrightarrow D_1 = C_2 + D + A_1 \cdot r_{2,n} - A \cdot r_{2,n}.$$

Eingesetzt in die Zielfunktion ergibt sich

$$R^* = C_1 \cdot s_{1,n} + C_2 \cdot s_{2,n} + D \cdot s_{2,n} - A \cdot r_{2,n} \cdot s_{2,n} + (C_2 + D + A_1 \cdot r_{2,n} - A \cdot r_{2,n}) \cdot (s_{1,n} - s_{2,n}) - A_1 \cdot (r_{1,n} \cdot s_{1,n} - r_{2,n} \cdot s_{2,n}) \rightarrow \min$$

und es muss lediglich eine optimale Annuität  $A_1$  bestimmt werden, wobei die Ableitung

$$\frac{\partial R^*}{\partial A_1} = s_{1,n} \cdot (r_{2,n} - r_{1,n}) = -s_{1,n} \cdot (r_{1,n} - r_{2,n})$$

ist. Die optimale Wahl von  $A_1$  ist somit abhängig von der Rentenbarwertfaktordifferenz von DG 1 und DG 2. Ist diese negativ (und damit die Ableitung insgesamt positiv) bestätigt sich die anfängliche Aussage aus der Betrachtung der Zielfunktion ohne Berücksichtigung der Nebenbedingung und  $A_1$  wird so niedrig wie möglich gewählt, d.h.  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = A$ . Damit ist ein Darlehensbündel mit  $D_1 = C_2 + D - A \cdot r_{2,n}$  und  $D_2 = D - D_1 = A \cdot r_{2,n} - C_2$  optimal. Ist die Ableitung jedoch negativ (d.h. die Rentenbarwertfaktordifferenz positiv), so ändert sich dadurch, dass die Nebenbedingung eingehalten werden muss, die anfängliche Aussage

hinsichtlich Annuität 1. Der restschuldsteigernde Effekt einer Darlehensaufnahme bei DG 2 überwiegt den restschuldensenkenden Effekt einer Annuität an DG 2 und es ist nun doch vorteilhaft, wenn eine möglichst hohe Annuität an DG 1 bezahlt wird (und ein möglichst hohes Darlehen bei diesem DG aufgenommen wird):  $D_1 = D; D_2 = 0; A_1 = A; A_2 = 0$ .

Entsprechen sich die Rentenbarwertfaktoren, so lässt sich durch Aufteilung der Annuität kein Vorteil in der angepassten Zielfunktion erzielen. Wird jedoch nur das Darlehensangebot  $b = 1$  abgeschlossen, so „spart“ sich der Kunde  $C_2$  in der korrekten Zielfunktion.

*Konstellation 2b,*

*c) ist positiv und d) ist negativ ( $s_{1,n} > s_{2,n}$  und  $r_{1,n} \cdot s_{1,n} > r_{2,n} \cdot s_{2,n}$ ):*

Das Vorgehen ist analog Konstellation 2a, jedoch greift nun die Nebenbedingung (3) für DG

1. Durch Umformungen ergibt sich die Ableitung der Zielfunktion nach  $A_1$  mit

$$\frac{\partial R^*}{\partial A_1} = s_{2,n} \cdot (r_{2,n} - r_{1,n}) = -s_{2,n} \cdot (r_{1,n} - r_{2,n}).$$

Ist diese negativ, so ist ein Darlehensbündel optimal:

$$A_1 = A; A_2 = 0; D_1 = A \cdot r_{1,n} - C_1; D_2 = C_1 + D - A \cdot r_{1,n}$$

Ist diese positiv, fällt die Entscheidung vollständig für DG 2:  $D_1 = 0; D_2 = D; A_1 = 0; A_2 = A$

Sollten sich die Rentenbarwertfaktoren entsprechen, ist die alleinige Aufnahme von Darlehensangebot  $b = 2$  zu empfehlen.

*Konstellation 3,*

*c) und d) sind gleich null ( $s_{1,n} = s_{2,n}$  und  $r_{1,n} \cdot s_{1,n} = r_{2,n} \cdot s_{2,n}$ ):*

In dieser Konstellation entsprechen sich sowohl die Endwert- als auch die

Rentenendwertfaktoren der DG und der sich ergebende Wert der vereinfachten Zielfunktion

(7) ist unabhängig von der Aufteilung der Annuität und der Darlehenshöhe auf die DG. Im

Hinblick auf die korrekte Zielfunktion (2) sollte jedoch nur das Darlehensangebot mit dem

niedrigeren vorgegebenen Barwert  $C$  in der Darlehensgeberkalkulation abgeschlossen werden.

Die folgende Abbildung fasst die Ergebnisse der einzelnen Konstellationen zusammen.

Abb. 6: Optimierungsergebnisse bei vereinfachter Zielfunktion

Konstellationen bzgl. der Faktoren in Formel (7)	c) positiv: $s_{1,n} > s_{2,n}$	c) negativ: $s_{1,n} < s_{2,n}$	c) null: $s_{1,n} = s_{2,n}$
d) positiv: $r_{1,n} \cdot s_{1,n} < r_{2,n} \cdot s_{2,n}$	$D_1 = 0; D_2 = D$ $A_1 = 0; A_2 = A$	Wenn $r_{1,n} < r_{2,n}$ : $D_1 = C_2 + D - A \cdot r_{2,n}$ $D_2 = D - D_1 = Ar_{2,n} - C_2$ $A_1 = 0; A_2 = A$ Wenn $r_{1,n} \geq r_{2,n}$ : $D_1 = D; D_2 = 0$ $A_1 = A; A_2 = 0$	$D_1 = 0; D_2 = D$ $A_1 = 0; A_2 = A$
d) negativ: $r_{1,n} \cdot s_{1,n} > r_{2,n} \cdot s_{2,n}$	Wenn $r_{1,n} > r_{2,n}$ : $D_1 = A \cdot r_{1,n} - C_1$ $D_2 = C_1 + D - A \cdot r_{1,n}$ $A_1 = A; A_2 = 0$ Wenn $r_{1,n} \leq r_{2,n}$ : $D_1 = 0; D_2 = D$ $A_1 = 0; A_2 = A$	$D_1 = D; D_2 = 0$ $A_1 = A; A_2 = 0$	$D_1 = D; D_2 = 0$ $A_1 = A; A_2 = 0$
d) null: $r_{1,n} \cdot s_{1,n} = r_{2,n} \cdot s_{2,n}$	$D_1 = 0; D_2 = D$ $A_1 = 0; A_2 = A$	$D_1 = D; D_2 = 0$ $A_1 = A; A_2 = 0$	Wenn $C_1 > C_2$ : $D_1 = 0; D_2 = D$ $A_1 = 0; A_2 = A$ Wenn $C_1 \leq C_2$ : $D_1 = D; D_2 = 0$ $A_1 = A; A_2 = 0$

## Anhang 2: Ergänzende Berechnung 1 zu Abschnitt 4.3

Der Barwert eines Darlehens für den DG bestimmt sich bei gegebenem Nominalzinssatz nach

$$C_b \stackrel{!}{=} -D_b + A_b \cdot \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i_t+c_{b,t})^t} + \underbrace{\left[ D_b \cdot (1+\hat{i}_b)^n - A_b \cdot \frac{(1+\hat{i}_b)^n - 1}{\hat{i}_b} \right]}_{\text{Restschuld } R_{b,n}} \cdot \frac{1}{(1+i_n+c_{b,n})^n}$$

Zur Beantwortung der Frage, wie sich der Barwert bei einer Veränderung des Nominalzinssatzes verändert, genügt die Betrachtung der Ableitung der Restschuldformel

$R_{b,n}$  nach  $\hat{i}_b$ . Es ergibt sich nach Umformungen

$$\frac{\partial R_{b,n}}{\partial \hat{i}_b} = \frac{n}{1+\hat{i}_b} \cdot \underbrace{\left[ D_b \cdot (1+\hat{i}_b)^n - \frac{A_b \cdot (1+\hat{i}_b)^n - 1}{\hat{i}_b} \right]}_{R_{b,n} \geq 0 \text{ (Nebenbedingung)}} + A_b \cdot \frac{(1+\hat{i}_b)^{n+1} - 1 - \hat{i}_b \cdot (n+1)}{(1+\hat{i}_b) \cdot \hat{i}_b^2}$$

Mit  $(1+\hat{i}_b)^{n+1} = 1^{n+1} + (n+1) \cdot 1^{n+1-1} \cdot \hat{i}_b + \dots + \hat{i}_b^{n+1}$  (vgl. bspw. Opitz, 2004, S. 108) lässt sich abschätzen

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{b,n}}{\partial \hat{i}_b} &= \frac{n}{1+\hat{i}_b} \cdot R_{b,n} + A_b \cdot \frac{1^{n+1} + (n+1) \cdot 1^{n+1-1} \cdot \hat{i}_b + \dots + \hat{i}_b^{n+1} - 1 - \hat{i}_b \cdot (n+1)}{(1+\hat{i}_b) \cdot \hat{i}_b^2} = \\ &= \frac{n}{1+\hat{i}_b} \cdot R_{b,n} + A_b \cdot \frac{(n+1-1) \cdot 1^{n+1-2} \cdot \hat{i}_b^2 + \dots + \hat{i}_b^{n+1}}{(1+\hat{i}_b) \cdot \hat{i}_b^2} > 0 \end{aligned}$$

Wird ceteris paribus der Nominalzinssatz des Darlehens erhöht, so steigen die Restschuld und der Barwert des Darlehens.

### Anhang 3: Ergänzende Berechnung 2 zu Abschnitt 4.3

Abschnitt 4.3 untersucht das Verhältnis der Nominalzinssätze der beiden Darlehen, falls sich nach der Optimierung ein Darlehensbündel als Lösung ergibt.

Für die Analyse wird in der Ausgangssituation davon ausgegangen, dass eine Ein-Darlehen-Lösung realisiert wird, obwohl ein Darlehensbündel optimal ist. Dabei wird die Ein-Darlehen-Lösung mit dem Darlehen realisiert, welches in der Bündellösung zins- und tilgungsfrei wäre. Der resultierende Nominalzinssatz in dieser Ein-Darlehens-Lösung wird anschließend mit dem Nominalzinssatz dieses Darlehens im Darlehensbündel – das Darlehen ist in dieser Situation zins- und tilgungsfrei – verglichen und überprüft, ob der Nominalzinssatz im Darlehensbündel höher als in der Ausgangssituation ist. Ist dies der Fall, so fließt – wie in Abschnitt 4.3 bereits diskutiert – die Annuität vollständig in das Darlehen mit dem niedrigeren Nominalzinssatz. Für den Vergleich ist eine umfangreichere Abschätzung als in Fall 1 und Fall 2a notwendig, wenn in der Ausgangssituation gilt

$$C_b > A \cdot (r_{b,n} - \hat{r}_{b,n}^*) \quad \wedge \quad \hat{i}_{b,n} > (1 + i_n + c_{b,n}) \cdot \sqrt[n]{\frac{C_b}{D} + 1} - 1 \quad (\text{Fall 2b in Abschnitt 4.3}).$$

Diese Abschätzung wird im Folgenden durchgeführt, wobei wir die Situation betrachten, dass Darlehen  $b = 2$  im Optimum das zins- und tilgungsfreie Darlehen ist. Diese Situation ergibt sich, wenn für die Kalkulation der zwei Darlehensgeber

$s_{1,n} > s_{2,n} \wedge r_{1,n} \cdot s_{1,n} > r_{2,n} \cdot s_{2,n} \wedge r_{1,n} > r_{2,n}$  gilt. Die optimale Aufteilung von Annuität und Darlehenshöhe ist  $A_1 = A; A_2 = 0; D_1 = A \cdot r_{1,n} - C_1; D_2 = C_1 + D - A \cdot r_{1,n}$ .

Wird nur das im Optimum zins- und tilgungsfreie Darlehen  $b = 2$  aufgenommen und die vollständige Annuität in dieses Darlehen gezahlt (Ausgangssituation), so ergibt sich durch Näherungsverfahren aus der Gleichung

$$(15) \quad C_2 \stackrel{!}{=} \frac{1}{s_{2,n}} \cdot [D \cdot (\hat{s}_{2,n} - s_{2,n}) + A \cdot (r_{2,n} \cdot s_{2,n} - \hat{r}_{2,n} \cdot \hat{s}_{2,n})]$$

ein Nominalzinssatz  $\hat{i}_2$  für den die Gleichung erfüllt ist. Wird nun dieser Nominalzinssatz der Ausgangssituation zunächst für das zins- und tilgungsfreie Darlehen im Darlehensbündel festgelegt ( $D_2 = C_1 + D - A \cdot r_{1,n}; A_2 = 0$ ), so ergibt sich für den DG zunächst ein Barwert von

$$(16) \quad C_2^* \stackrel{!}{=} \frac{1}{s_{2,n}} \cdot [C_1 \cdot (\hat{s}_{2,n} - s_{2,n}) + D \cdot (\hat{s}_{2,n} - s_{2,n}) + A \cdot (r_{1,n} \cdot s_{2,n} - r_{1,n} \cdot \hat{s}_{2,n})].$$

Wäre dieser Barwert nun niedriger als der Barwert in der Ausgangssituation, d.h.

$C_2^* < C_2 \Leftrightarrow C_2^* - C_2 < 0$ , so müsste der Nominalzinssatz von Darlehen  $b = 2$  im Optimum größer sein als der Nominalzinssatz in der Ausgangssituation und die Annuität fließt im Darlehensbündel in das günstigere Darlehen. Mit  $r_2 = \hat{r}_2 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  ergibt sich aus (15) und (16)

$$(17) \quad C_2^* - C_2 = \frac{1}{s_{2,n}} \cdot \left\{ \underbrace{A \cdot \overbrace{(r_{1,n} - \hat{r}_{2,n})}^{>0} \cdot \overbrace{(s_{2,n} - \hat{s}_{2,n})}^{<0}}_{<0} - C_1 \cdot \overbrace{(s_{2,n} - \hat{s}_{2,n})}^{>0}}_{?} - A \cdot \varepsilon \cdot s_2 \right\}.$$

Gleichung (17) ist negativ, wenn

$$(18) \quad A \cdot (r_{1,n} - \hat{r}_{2,n}) \cdot (s_{2,n} - \hat{s}_{2,n}) - C_1 \cdot (s_{2,n} - \hat{s}_{2,n}) < 0 \Leftrightarrow r_{1,n} - \hat{r}_{2,n} > \frac{C_1}{A}$$

erfüllt ist. Da in dem betrachteten Fall  $\hat{i}_{2,n} > i_n + c_{2,n}$  ist, gilt

$r_{1,n} > r_{2,n} > \hat{r}_{2,n} \Leftrightarrow r_{1,n} - r_{2,n} < r_{1,n} - \hat{r}_{2,n}$ . Somit ist  $r_{1,n} - r_{2,n} > \frac{C_1}{A}$  hinreichend (aber nicht notwendig) für die Erfüllung von Bedingung (18). D.h., ist die Differenz der Rentenbarwertfaktoren von DG 1 und DG 2 größer als das Verhältnis von vorgegebenem Barwert des DG 1 zur Gesamtannuität des DN, so fließt im Darlehensbündel die Annuität in das günstigere Darlehen.

Erinnern wir uns nun, in welcher Situation wir uns befinden: Nach der Optimierung hat sich ein Darlehensbündel ergeben, wobei das Darlehen bei DG 2 ein zins- und tilgungsfreies Darlehen ist. Somit ist die Restschuld des Darlehensbündels bspw. kleiner als die Restschuld, wenn nur bei DG 2 ein Darlehen aufgenommen wird (vgl. Formel (7)):

$$(19) \quad \begin{aligned} & C_1 \cdot s_{1,n} + C_2 \cdot s_{2,n} + (A \cdot r_{1,n} - C_1) \cdot s_{1,n} - A \cdot r_{1,n} \cdot s_{1,n} + (C_1 + D - A \cdot r_{1,n}) \cdot s_{2,n} + 0 \cdot r_{2,n} \cdot s_{2,n} \\ & < \\ & C_2 \cdot s_{2,n} + D \cdot s_{2,n} - A \cdot r_{2,n} \cdot s_{2,n} \end{aligned}$$

Durch Umformung erhalten wir aus (19)  $r_{1,n} - r_{2,n} > \frac{C_1}{A}$ . Die Bedingung der vorherigen

Abschätzung, wann die Annuität im Darlehensbündel in das günstigere Darlehen fließt, ist somit erfüllt. Anderenfalls würde sich kein Darlehensbündel, sondern eine Ein-Darlehens-Lösung ergeben. (Ein analoges Ergebnis erhalten wir, wenn nicht Darlehen 2 sondern Darlehen 1 das zins- und tilgungsfreie Darlehen im Darlehensbündel wäre.)