Universität Augsburg
Prof. Dr. Hans Ulrich Buhl
Kernkompetenzzentrum
Finanz- & Informationsmanagement
Lehrstuhl für BWL, Wirtschaftsinformatik,
Informations- & Finanzmanagement

Diskussionspapier WI-191

Illiquide Assets in der Portfoliooptimierung

von

Dennis Diepold, Jochen Dzienziol[1]

in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft 79 (2009) 10, S. 1143-1173

[1] Jochen Dzienziol war zum Zeitpunkt der Erstellung dieser Arbeit wissenschaftlicher Mitarbeiter am Kernkompetenzzentrum Finanz- & Informationsmanagement und am Lehrstuhl WI-IF der Universität Augsburg.

Universität Augsburg, 86135 Augsburg
Besucher: Universitätsstr. 12, 86159 Augsburg
Telefon: +49 821 598-4801 (Fax: -4899)
www.fim-online.eu

Illiquide Assets in der Portfoliooptimierung

Von Dennis Diepold und Jochen Dzienziol

Dipl.-Math. oec. Dennis Diepold, wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl WI-IF und am Kernkompetenzzentrum Finanz- & Informationsmanagement der Universität Augsburg, Universitätsstraße 16, 86135 Augsburg.

E-Mail: dennis.diepold@wiwi.uni-augsburg.de

Dr. Jochen Dzienziol, Consultant, Finalix AG, Baarerstraße 110, CH-6302 Zug.*
E-Mail: jochen.dzienziol@finalix.ch

* Dr. Jochen Dzienziol war zum Zeitpunkt der Erstellung dieser Arbeit wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl WI-IF und am Kernkompetenzzentrum Finanz- & Informationsmanagement der Universität Augsburg.

Illiquide Assets in der Portfoliooptimierung

Zusammenfassung

Eine Liquiditätsanforderung verlangt bei einer Portfoliooptimierung mit illiquiden Assets die Berücksichtigung deren besonderer Eigenschaften. In der vorliegenden Arbeit werden diese Eigenschaften dadurch definiert, dass illiquide Assets nur vollständig verkauft werden können und ein kurzfristiger Verkauf zu Verlusten führt. Anhand eines einfachen Modells werden signifikante Unterschiede zu einer Optimierung mit lediglich liquiden Assets nachgewiesen. So hat beispielsweise die zufällige Liquiditätsanforderung zur Folge, dass der Portfoliowert auch bei sicheren Renditen der Assets bereits unsicher ist, und damit trotz der sicheren Renditen eine Aufteilung sowohl auf liquide als auch illiquide Assets optimal sein kann. Des Weiteren kann der erwartete Portfoliowert abhängig von der Varianz der Assets sein und sich eine negative Korrelation zwischen Assetklassen nachteilig auf diesen auswirken.

Illiquid Assets in Portfolio Optimization

Summary

When optimizing a portfolio, which comprises liquid as well as illiquid assets, under the constraint of a liquidity requirement, one has to take into account the particular characteristics of illiquid assets. Illiquid assets in this context have the constituting property that they can only be sold as a whole and - if sold on a short term basis - selling leads to losses. Performing the analysis of a single period model in a mean downside risk framework with one liquid and one illiquid asset, significant differences are proven in comparison to the results of an optimization concerning solely liquid assets. For example, although the return on assets is safe in the first scenario, the portfolio value is already risky due to the uncertain liquidity requirement and situations arise where the allocation to both the liquid and the illiquid asset is optimal. Furthermore, when asset returns are uncertain, the expected portfolio value depends on the assets' variances and can even be increased by positive correlations.

A. Einleitung

Die Frage nach der bestmöglichen Anlage des Vermögens beschäftigt nicht nur viele Anleger, sondern ist seit gut einem halben Jahrhundert Forschungsgegenstand. Spätestens seit der Begründung der modernen Portfoliotheorie durch Harry Markowitz (1952) erfreut sich dieses Gebiet zunehmenden Interesses in Wissenschaft und Praxis. Während Markowitz für eine Optimierung zunächst lediglich Erwartungswert und Varianz der Renditen untersuchte, wurde dieses Modell im Laufe der Zeit sukzessive weiterentwickelt und versucht, die Realwelt immer genauer abzubilden. So wurde auch die Bedeutung von Transaktionskosten im Kontext optimaler Anlageentscheidungen umfangreich untersucht, zum Beispiel von Constantinides (1976; 1986), Morton und Pliska (1995) oder Schroder (1995). Insbesondere mit Hilfe der raschen technologischen Entwicklung wurde es möglich, weitere realitätsnahe Nebenbedingungen in den Heuristiken und Algorithmen für die Optimierungsfragestellung zu berücksichtigen und damit die praktische Anwendbarkeit der Ergebnisse zu fördern. So entwickelten beispielsweise Mansini und Speranza (1999) oder Jobst et al. (2001) heuristische Verfahren zur Optimierung unter Ganzzahligkeitsbedingungen, welche unter anderem zur Abbildung einer Anzahl unteilbarer Assets nötig sind. Neuere Untersuchungen behandeln des Weiteren Themen wie Hedge-Fonds (Cottier, 1997) oder Humankapital (Spremann und Winhart, 1997), welches nicht handelbar ist. Bereits in den 50er- und 60er-Jahren wurden darüber hinaus so genannte Safety-First-Ansätze entwickelt (Roy, 1952; Telser 1955; Kataoka, 1963), die durch die Nutzung von Ausfallrisikomaßen dem intuitiven Risikoverständnis – nämlich dass lediglich negative Abweichungen von einem bestimmten Zielwert als Risiko gesehen werden – Rechnung trugen. Während diese zunächst aufgrund der nicht ausreichend vorhandenen IT-Unterstützung nicht weiterverfolgt werden konnten, erlangten Ausfallrisikomaße in jüngster Zeit wieder stark zunehmendes Interesse (bspw. Albrecht et al., 1998; Artzner et al., 1999; Rockafellar und Uryasev, 2002; Yamai und Yoshiba, 2005). Mit der bisherigen Forschung wurde damit besonders auf die Kapitalanlageziele Rentabilität und Sicherheit eingegangen.

Die vorliegende Arbeit will einen Beitrag zur Berücksichtigung des dritten Anlegerziels des so genannten magischen Dreiecks (Ruda, 1988) – der Liquidierbarkeit – leisten. Dieser Umwandlung einer Anlage in liquide Mittel kommt insbesondere im Hinblick auf illiquide Assetklassen wie Immobilien, Kunstgegenstände, Gesellschaftsanteile oder auch Lebens- und Rentenversicherungen eine Bedeutung zu. Da diese zumeist nur mit hohen Kosten (z. B. Vertragsstrafen vor Ablauf einer Vertragsbindung, Steuernachteile, geringer Verkaufspreis aufgrund einer schlechten Verhandlungsposition bei kurzfristigem Verkauf etc.) kurzfristig liquidiert werden können, müssen diese potenziellen Verluste im Anlagekonzept berücksichtigt werden, sofern ein Liquiditätsbedarf des Anlegers absehbar ist (Liquiditätsanforderung). Als Alternative zu einer kurzfristigen Liquidierung könnte man einen eintretenden Bedarf so lange mit einem Kredit (und damit der Inkaufnahme von Schuldzinsen) zwischenfinanzieren, bis eine verlustfreie Liquidierung möglich ist. In der Realität ist die Liquidierbarkeit somit ein wichtiger Einflussfaktor, der bisher jedoch in den Modellen zur Portfoliooptimierung wenig Berücksichtigung fand.

Liquidität wird dabei durch zwei wesentliche Eigenschaften gemessen: Die Handelbarkeit und den Preiseinfluss (Kempf, 1998). Ein perfekt liquides Asset wird somit dadurch charakterisiert, dass es jederzeit ohne Beeinflussung des Preises handelbar ist. Kempf (1998) analysiert verschiedene Konzepte zur Liquiditätsmessung, welche sich vornehmlich mit dem Preis von Liquidität – im Sinne einer kurzfristigen Handelbarkeit – beschäftigen, auf deren theoretische Eignung als Liquiditätsmaß hin. Der Einfluss von Illiquidität auf eine Portfolioselektion wird dabei nicht untersucht. Speziell mit dem Thema illiquider Assets in der Portfoliooptimierung beschäftigen sich beispielsweise Schwartz und Tebaldi (2004), welche Illiquidität eines Assets in einem kontinuierlichen Modell damit gleichsetzen, dass dieses Asset nicht gehandelt werden kann. Der Fokus liegt dabei auf der Optimierung der Aufteilung liquider Assets um ein *vorgegebenes* illiquides Asset mit fixem Anteil, ohne dass der optimale Anteil des illiquiden Assets untersucht wird. Faig und Shum (2002) untersuchen in einem 3-Perioden-Modell ebenfalls die optimale Aufteilung liquider Assets um ein illiquides Projekt, wobei dieses ausgehend von einem in der ersten Periode gewählten Startwert in der zweiten Periode entweder zu einem proportional festgelegten Wert fortgesetzt oder vollständig abgebrochen werden kann. Huang (2003) untersucht in einem kontinuierlichen Modell mit jeweils einem sicheren liquiden und illiquiden Asset den Einfluss von Liquiditätsanforderungen, die in zufälligen Zeitpunkten auftreten, auf die Liquiditätsprämie. Er kommt zu dem Ergebnis, dass Illiquidität – repräsentiert durch Transaktionskosten bei Verkauf – starke Effekte auf die Renditen von Assets haben kann. Trotz dieser wissenschaftlichen Bemühungen haben insbesondere die quantitativen Besonderheiten illiquider Assets und ihre Auswirkungen auf die Portfoliooptimierung noch nicht theoretisch fundiert Eingang in die Anlageberatung gefunden.

Aufbauend auf der von Kempf (1998) dargestellten Definition von Liquidität werden in dieser Arbeit illiquide Assets zum Ersten dadurch charakterisiert, dass ein kurzfristiger Verkauf nur mit Transaktionskosten möglich ist. Zum Zweiten werden ausschließlich illiquide Assets untersucht, die nicht teilbar sind. Dies trifft insbesondere auf Wohnimmobilien und Rentenversicherungsverträge privater Anleger zu.

Ziel des Papers ist es, mit Hilfe eines quantitativen Modells den Einfluss dieser Besonderheiten illiquider Assets unter einer gegebenen Liquiditätsanforderung auf die Portfoliooptimierung im Vergleich zu einer Optimierung mit lediglich liquiden Assets zu untersuchen. Wie bereits erläutert, ist die Liquidierbarkeit ein wichtiger Einflussfaktor, der sich - wie in diesem Beitrag gezeigt wird - stark auf Portfoliorendite und -risiko auswirkt, die Anlageempfehlung verändern kann und zu grundlegenden, strukturellen Unterschieden im Vergleich zum Optimierungsergebnis bei liquiden Assets führt. Ohne die Berücksichtigung dieser besonderen Eigenschaften in den vielfältigen, verwendeten Optimierungsmodellen in Wissenschaft und Praxis können sich Fehlentscheidungen ergeben.

Zur Aufstellung des Modells mit zwei Assetklassen werden in Kapitel B die grundlegenden Modellannahmen vorgestellt, auf Basis derer in Kapitel C die Auswirkungen der Besonderheiten illiquider Assets auf die optimale Anlageentscheidung aufgezeigt werden. Im abschließenden Kapitel werden die Ergebnisse zusammengefasst.

B. Modellannahmen

Im Folgenden wird ein privater Anleger betrachtet, der unter Beachtung seiner Risikoeinstellung einen vorgegebenen Anlagebetrag optimal auf ein liquides und ein illiquides Asset aufteilen möchte. Dabei stellt sich dem Anleger primär die Frage, ob – und wenn ja, in welcher Höhe – er angesichts einer eventuell eintretenden Liquiditätsanforderung ein illiquides Asset in sein Portfolio aufnehmen soll. Hierzu werden die folgenden Annahmen getroffen.

(A1) *Zielfunktion:* Ein Anleger will einen derzeit liquide verfügbaren Betrag I für eine Periode anlegen. Dabei stehen ihm eine liquide und eine illiquide Assetklasse zur Verfügung. Durch die Festlegung des prozentualen Anteils $x_1 \in [0,1]$ der liquiden Assetklasse am Portfolio $x = (x_1, 1 - x_1)^T$ mit Portfoliowert $V(x_1)$, soll der erwartete Portfoliowert am Ende der Periode $E(V(x_1))$ maximiert werden.

(A2) *Risikoaversion:* Die (zeitkonstante) Risikoaversion des Anlegers wird durch folgende Restriktion abgebildet: Es existiert eine Grenze ωI ($\omega > 0$) und eine Wahrscheinlichkeit $\alpha \in (0,1]$ für ein Shortfall-Risikomaß, bezogen auf den Portfoliowert am Ende der Periode.

Durch die Annahmen A1 und A2 werden Rendite und Risiko somit nicht in einer Präferenzfunktion aggregiert. Stattdessen erfolgt die Risikorestriktion als Nebenbedingung. Dies ermöglicht zum Einen die differenzierte Analyse, wie sich die Besonderheiten illiquider Assets auf die Rendite und das Risiko eines Portfolios auswirken, worauf der Fokus der vorliegenden Arbeit liegt. Zum Anderen will der Anleger sicherstellen, dass er eine – in A3 beschriebene – Liquiditätsanforderung erfüllen kann. Damit kommt der expliziten Begrenzung des Shortfall-Risikos, d. h. der möglichen negativen Abweichungen von einem vorgegebenen Zielwert, eine entscheidende Rolle zu. Zudem ist dieses intuitive Vorgehen für einen Anleger unmittelbar nachvollziehbar.[1]

Im vorigen Kapitel wurde beschrieben, dass den Besonderheiten illiquider Assets insbesondere dann eine Bedeutung in der Portfoliooptimierung zukommt, wenn die Notwendigkeit zur Entnahme liquider Mittel aus dem Portfolio bestehen könnte.

(A3) *Liquiditätsanforderung:* Mit Wahrscheinlichkeit $p_l > 0$ benötigt der Anleger am Ende der Periode einen Betrag $l \cdot I$ ($l > 0$) liquide zur Entnahme. Daher muss das Portfolio am Ende der Periode eventuell derart umgeschichtet werden, dass mindestens der Betrag $l \cdot I$ in der liquiden Assetklasse angelegt ist.

Ist bei einem Anleger eine Liquiditätsanforderung vorhanden, so sind die oben beschriebenen Besonderheiten illiquider Assets im Vergleich zu liquiden Assets – insbesondere bei einem Verkauf illiquider Assets – zu beachten. Diese werden wie folgt charakterisiert.

(A4) *Assets:* Die Zufallsgrößen y_1 und y_2 bezeichnen den Faktor, um welchen sich der Wert des liquiden (y_1) beziehungsweise illiquiden Assets (y_2) in der betrachteten Periode verändert (Wertentwicklung, entspricht 1 + Periodenrendite). Der Erwartungswert von y_i sei μ_i. Sowohl das liquide als auch das illiquide Asset sind kurzfristig liquidierbar, wobei aber die kurzfristige Liquidierung des illiquiden Assets mit prozentualen Kosten $c \in (0,1]$ verbunden ist. Die Variable $b \in \{0,1\}$ beschreibt, ob das illiquide Asset am Ende der Periode vollständig liquidiert werden muss ($b = 1$) oder nicht ($b = 0$). Da die Notwendigkeit zur Liquidierung des illiquiden Assets von dem zufällig eintretenden Liquiditätsbedarf abhängt, ist b ebenfalls eine Zufallsgröße.

Im Modell wird somit davon ausgegangen, dass die Länge der Periode kürzer als die Dauer für einen verlustfreien Verkauf des illiquiden Assets ist (z. B. Vertragsdauer einer Kapitallebensversicherung oder benötigte Zeit, bis eine Immobilie zum gewünschten Preis verkauft werden kann). Ein aus der illiquiden Assetklasse in beliebiger Höhe wählbares Asset (bspw. Abschluss einer Lebensversicherung oder Auswahl einer Immobilie mit entsprechendem Wert) kann dabei nur vollständig (vgl. bspw. Faig und Shum, 2002) und – da ein Verkauf kurzfristig erfolgt – mit Wertverlust verkauft werden.[2] Da lediglich durch den vollständigen Verkauf des illiquiden Assets Liquidität gewonnen werden kann, wird implizit angenommen, dass eine Beleihung des illiquiden Assets nicht möglich ist (z. B. aufgrund einer Abneigung des Anlegers gegen eine Verschuldung oder unzureichender Bonität).[3]

Das „dritte Anlageziel" Liquidität wird also nicht als separates Kriterium in der Zielfunktion abgebildet, sondern die Auswirkungen des Liquiditätsaspektes werden monetarisiert (vgl. bspw. Huang, 2003). Der prozentuale Verlust bei kurzfristigem Verkauf des illiquiden Assets entspricht beispielsweise einer prozentualen Maklergebühr beim kurzfristigen Immobilienverkauf oder der Nachbesteuerung der Zinserträge bei Auflösung einer Kapitallebens- oder Rentenversicherung vor Ablauf von 12 Jahren (AltEinkG Artikel 1). Andere Kauf- oder Verkaufstransaktionskosten von Assets werden nicht betrachtet.

C. Analyse des Modells

Um erste Unterschiede bei der Portfoliooptimierung durch die Berücksichtigung der Besonderheiten illiquider Assets herauszustellen, wird zunächst von sicheren Wertentwicklungen ausgegangen und anschließend sukzessive das Risiko bezüglich der Wertentwicklung des liquiden und illiquiden Assets berücksichtigt.

I. Ein liquides und ein illiquides Asset mit jeweils sicherer Wertentwicklung

Betrachtet wird folgende Ausgangssituation, in welcher die Annahmen (A1)-(A4) gelten und wie folgt erweitert werden:

(AW) *Assetauswahl:* Die Wertentwicklung beider Assets ist sicher (μ_1, μ_2).

(AR) *Risikomaß:* Zur Messung des Risikos wird der Value-at-Risk (VaR) verwendet. Der Anleger fordert, dass mit einer vorgegebenen Mindestwahrscheinlichkeit $\alpha > (1 - p_l)$ ein Portfoliowert von mindestens ωI am Ende der Periode erreicht wird.[4]

Wie im Folgenden gezeigt wird, ist der Portfoliowert trotz sicherer Renditen risikobehaftet und die Risikoaversion des Anlegers somit zu berücksichtigen. Üblicherweise wird der VaR zum Konfidenzniveau α definiert als der (niedrigste) Verlust, der (mindestens) mit Wahrscheinlichkeit α nicht überschritten wird. Die in diesem Arbeitspapier durch Annahme

(AR) gewählte Darstellung ist hierzu inhaltlich äquivalent, erleichtert jedoch die Nachvollziehbarkeit der folgenden Analysen, da somit lediglich anhand *einer* Verteilung - der Verteilung des Portfoliowerts am Ende der Periode - argumentiert werden kann. Der VaR ist ein etabliertes Ausfallrisikomaß, welches sich im Risikomanagement als Standardkonzept zur Risikomessung durchgesetzt hat (Buhl, 2004). Er lässt sich dem Anleger sehr gut vermitteln und besitzt auch besonders wegen der einfachen Kommunizierbarkeit eine hohe Beliebtheit (Baule, 2004).[5]

1. Analyse der Zielfunktion

Da die Wertentwicklung beider Assets sicher ist, ergibt sich auf Basis der bisherigen Annahmen für den zu maximierenden erwarteten Portfoliowert:

$$E(V(x_1)) = E(I[x_1\mu_1 + (1-x_1)\mu_2(1-bc)]) = I[x_1\mu_1 + (1-x_1)\mu_2(1-E(b)c)]. \qquad (1)$$

Der erwartete Portfoliowert setzt sich aus der sicheren Wertentwicklung des liquiden Assets μ_1 und der erwarteten Wertentwicklung des illiquiden Assets $\mu_2(1-E(b)c)$ - jeweils gewichtet mit dem Anteil am Portfolio - zusammen. Da $b=1$ für die Liquidierung des illiquiden Assets steht, ist $E(b)$ interpretierbar als die Wahrscheinlichkeit, mit der das illiquide Asset verkauft werden muss, mit der Folge eines prozentualen Wertverlusts *c*. Liegt diese Verkaufswahrscheinlichkeit echt zwischen 0 und 1, so ist der Wert des illiquiden Assets aus Sicht des Anlegers (mit seiner individuellen Liquiditätsanforderung) *risikobehaftet*, obwohl die Wertentwicklung des Vermögensgegenstandes an sich sicher ist. Interessant ist zudem, dass die Höhe dieser Verkaufswahrscheinlichkeit $E(b)$ - und damit die erwartete Wertentwicklung des illiquiden Assets - abhängig von dem Anlagebetrag im liquiden Asset ist. Reicht der sichere Wert $Ix_1\mu_1$ des liquiden Assets am Ende der Periode aus, um die mit Wahrscheinlichkeit p_l eintretende Liquiditätsentnahme in Höhe von $l\,I$ zu ermöglichen (vgl. (A4)), so ist sicher keine Liquidierung des illiquiden Assets notwendig ($Ix_1\mu_1 \geq lI \Leftrightarrow x_1 \geq l/\mu_1$). Reicht die Wertentwicklung des liquiden Assets nicht aus, so ist das illiquide Asset zu liquidieren, wenn der Liquiditätsbetrag benötigt wird, das heißt mit Wahrscheinlichkeit p_l. Für die Liquidierungswahrscheinlichkeit ergibt sich somit in Abhängigkeit des Anteils des liquiden Assets

$$E(b) = (E(b))(x_1) = \begin{cases} p_l & , x_1 < l/\mu_1 \\ 0 & , x_1 \geq l/\mu_1 \end{cases}. \qquad (2)$$

Daraus folgt: Wird der Anlagebetrag im liquiden Asset so gewählt, dass bei Eintritt der Liquiditätsanforderung das illiquide Asset liquidiert werden muss ($x_1 < l / \mu_1$), so ist dessen erwartete Wertentwicklung $\mu_2(1 - p_l c)$, sonst μ_2.

Es stellt sich nun die Frage, welche Aufteilung des Anlagebetrags auf die Assetklassen für den Anleger optimal ist. Würden zwei liquide Assets mit jeweils sicherer Wertentwicklung zur Auswahl stehen, so wäre die Anteilsoptimierung einfach: Der Betrag wird vollständig in das Asset mit der höheren Wertentwicklung investiert. Bei einer illiquiden Assetklasse kann jedoch deren erwartete Wertentwicklung – wie gerade gezeigt – durch die Anteilsfestlegung des liquiden Assets beeinflusst werden. Die optimale Anteilsaufteilung ist somit neben den Wertentwicklungen der zwei Assetklassen auch von der Liquiditätsanforderung abhängig und es sind folgende Situationen zu unterscheiden.

1. Situation $\mu_2 \leq \mu_1$: In dieser Situation ist die vollständige Investition des Anlagebetrags in das liquide Asset optimal ($x_1 = 1$, vgl. *Abbildung 1*). Der Portfoliowert am Ende der Periode ist sicher. Das Optimierungsergebnis entspricht dem Ergebnis, wenn man die Besonderheiten des illiquiden Assets vernachlässigen würde.

2. Situation $\mu_2(1 - p_l c) \leq \mu_1 < \mu_2$: Der erwartete Portfoliowert steigt in dieser Situation mit dem Anteil des liquiden Assets solange, bis dessen Wert zur Deckung des benötigten Betrags ausreicht (vgl. *Abbildung 1*). Ist dieser Anteil erreicht ($x_1 = l / \mu_1$), so wird die Rendite des illiquiden Assets *sprunghaft* höher als die des liquiden Assets. Da eine weitere Erhöhung von x_1 den Portfoliowert senkt, ist $x_1 = l / \mu_1$ optimal. Damit wird der eventuell benötigte Betrag diskontiert im liquiden Asset angelegt. Ein Risiko bezüglich des Portfoliowerts am Ende der Periode besteht nicht. Werden die Besonderheiten des illiquiden Assets vernachlässigt, würde fälschlicherweise nur in das illiquide Asset investiert werden. Diese Lösung besäße einerseits einen niedrigeren erwarteten Portfoliowert und wäre zudem risikobehaftet, da mit Wahrscheinlichkeit p_l ein Verkauf des illiquiden Assets mit zugehöriger Verlustrealisierung notwendig wäre.

3. Situation $\mu_1 < \mu_2(1 - p_l c)$: Obwohl die Rendite des liquiden Assets selbst dann geringer als die erwartete Rendite des illiquiden Assets, falls dieses bei Eintritt der Liquiditätsanforderung liquidiert werden muss, ist es in dieser Situation nicht zwingend optimal, vollständig in das illiquide Asset zu investieren. Es stellt sich folgende Frage: Ist es besser, (a) vollständig in das illiquide Asset zu investieren und eine eventuell notwendige Liquidierung in Kauf zu nehmen (erwartete Wertentwicklung $\mu_2(1 - p_l c)$), oder (b) den

Anteil l/μ_1 trotz geringerer Wertentwicklung μ_1 in das liquide Asset einzubringen, um eine Liquidierung des illiquiden Assets zu vermeiden und somit dessen Wertentwicklung für den restlichen Anlagebetrag $I(1-l/\mu_1)$ auf μ_2 zu erhöhen? Im Vergleich der zwei erwarteten Portfoliowerte ist eine Aufteilung (b) somit dann vorzuziehen, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\underbrace{E(V(0))}_{(a)} < \underbrace{E(V(\frac{l}{\mu_1}))}_{(b)} \Leftrightarrow \mu_2(1-p_l c) < (\frac{l}{\mu_1})\mu_1 + (1-\frac{l}{\mu_1})\mu_2 \qquad (3)$$

Erfüllen die exogenen Parameter μ_1, μ_2, l, p_l, c die Ungleichung (3), so ist $x_1 = l/\mu_1$ optimal, sonst $x_1 = 0$. Im letzteren Fall ist aufgrund der Unsicherheit bezüglich des realisierten Werts die Risikopräferenz des Anlegers zu berücksichtigen (vgl. *C.I.2*), welche zu einer Reduzierung des Anteils des illiquiden Assets führen kann. Das heißt, in dieser Situation wird die vollständige Investition in das illiquide Asset immer sinnvoller, je höher der Liquiditätsbedarf beziehungsweise je niedriger dessen Eintrittswahrscheinlichkeit oder der Liquidierungsverlust ist (siehe Anhang *A 1*). Werden die Besonderheiten illiquider Assets vernachlässigt, ergibt sich nur dann die gleiche Aufteilung, wenn es nicht sinnvoll ist, die Liquidität vorzuhalten (a). Anderenfalls würde wiederum eine falsche Empfehlung gegeben werden.

Abbildung 1: Zielfunktion in Situation 1 bzw. 2

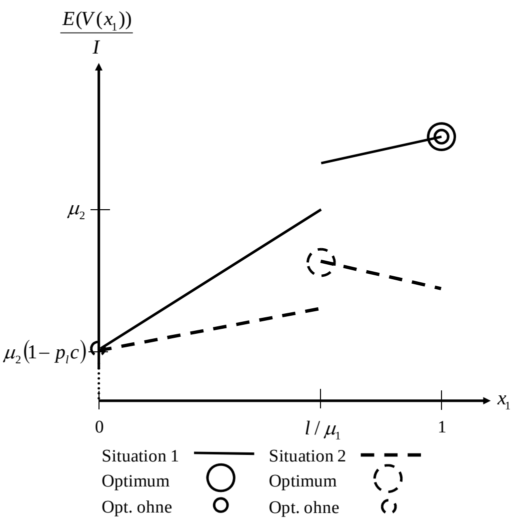
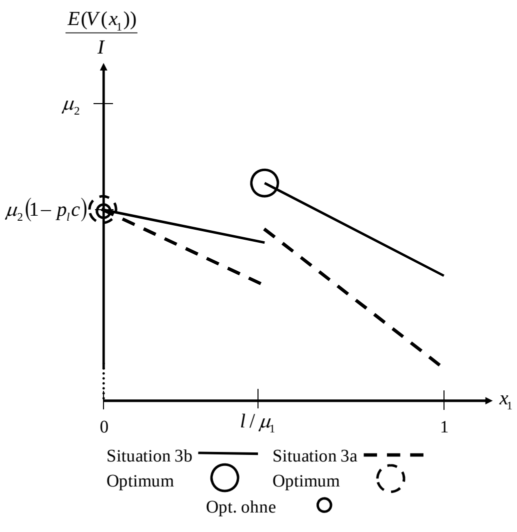


Abbildung 2: Zielfunktion in Situation 3



Die Abbildungen 1 und 2 zeigen die erwartete Wertwicklung des Portfolios ($E(V(x_1))/I$) in Abhängigkeit des Anlagebetrags im liquiden Asset für die drei unterschiedlichen Situationen. Dabei werden die jeweiligen Optima mit den Ergebnissen einer Optimierung ohne Berücksichtigung der Besonderheiten illiquider Assets (Opt. ohne) verglichen. Die

Abbildungen zeigen, dass sich in den Situationen, in denen bei Vernachlässigung der Besonderheiten illiquider Assets vollständig in das illiquide Asset investiert wird, ein signifikant niedrigerer erwarteter Portfoliowert ergeben kann. Dies ist eine Folge der Vernachlässigung der Liquiditätsanforderung.

Auf Basis der bisherigen Analyse lässt sich folgendes Ergebnis festhalten:

Ergebnis 1:

Bei einer Portfoliooptimierung mit lediglich sicheren, liquiden Assets wird die höchste Portfoliorendite erreicht, wenn der Gesamtanlagebetrag ausschließlich in das Asset mit der höchsten Rendite investiert wird. Im Unterschied dazu führen die Besonderheiten illiquider Assets (nur vollständiger Verkauf möglich, Wertverlust bei kurzfristigem Verkauf) beim Vorliegen einer Liquiditätsanforderung des Anlegers dazu, dass die erwartete Rendite des illiquiden Assets vom Anlagebetrag im liquiden Asset abhängig ist. Hierdurch kann sich die Situation ergeben, dass die höchste Portfoliorendite nur durch Aufteilung des Anlagebetrags sowohl auf das liquide als auch das illiquide Asset erreicht wird. Werden die Besonderheiten illiquider Assetklassen trotz vorhandener Liquiditätsanforderung nicht bei der Optimierung berücksichtigt, können sich signifikante Fehlentscheidungen ergeben.

Beispiel 1:

In unserem ersten Beispiel stehen ein Tagesgeldkonto mit 3-prozentiger Verzinsung ($\mu_1 = 1.03$), sowie als zweites Asset eine Lebensversicherung mit Rendite 6 % ($\mu_2 = 1.06$) und einem Verlust bei kurzfristiger Liquidierung von 4 % ($c = 0.04$) zur Verfügung. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % ($p_l = 0.6$) werden am Ende der Periode 40 % des Gesamtanlagebetrags liquide benötigt ($l = 0.4$). Mit den Angaben folgt $\mu_1 = 1.03 < 1.0346 \approx \mu_2(1 - p_l c)$ und damit Situation 3. Es gilt zu bestimmen, ob $x_1 = 0$ oder $x_1 = l / \mu_1$ optimal ist. Dazu wird überprüft, ob Ungleichung (3) erfüllt ist. Es gilt: $1.0346 \approx \mu_2(1 - p_l c) < (\frac{l}{\mu_1})\mu_1 + (1 - \frac{l}{\mu_1})\mu_2 \approx 1.0483$. Damit ist das Portfolio $x = (l / \mu_1, 1 - l / \mu_1) = (0.39, 0.61)$ mit einer erwarteten Rendite von 4,83 % optimal (vgl. *Abbildung 2*, Situation 3b). Es wird also genau so viel in das renditeschwächere, liquide Asset investiert, dass der mit Wahrscheinlichkeit 60 % benötigte Betrag am Ende der Periode bereits liquide zur Verfügung steht und somit der verbleibende Betrag mit Sicherheit die volle Rendite des illiquiden Assets erwirtschaftet. Lässt man die Besonderheiten illiquider Assets in diesem Beispiel unberücksichtigt, so wählt man die vollständige Investition in die illiquide

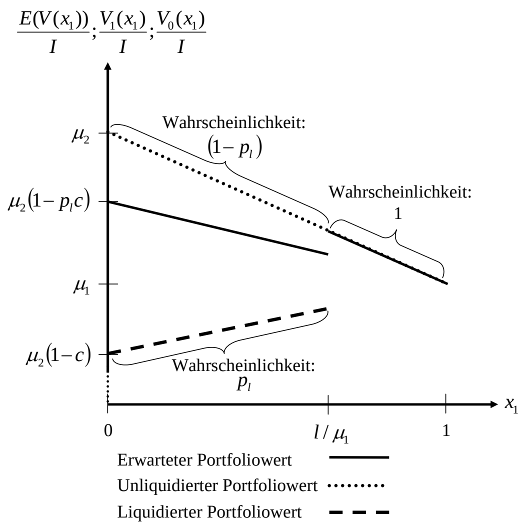
Anlage. Diese Lösung hat bei den angegebenen Liquiditätsanforderungen jedoch lediglich eine erwartete Portfoliorendite von 3,46 % und ist damit im Erwartungswert um 1,37 % schlechter als das Optimum in unserem Modell.

Das Beispiel und die bisherigen Ergebnisse zeigen, dass es in Bezug auf die Zielfunktion des erwarteten Portfoliowerts am Ende der Periode in mehreren Situationen sinnvoll ist, eine Aufteilung des Anlagebetrags auf das liquide und illiquide Asset vorzunehmen. Die folgende Analyse zeigt, dass darüber hinaus die Risikorestriktion des Anlegers eine relevante Einschränkung für die Anteile des liquiden und illiquiden Assets ergeben kann.

2. Analyse der Nebenbedingung

Im Folgenden wird die Risikorestriktion des Anlegers aus Annahme (AR) betrachtet, die dadurch berücksichtigt wird, dass ein Mindestportfoliowert mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit erreicht werden muss ($VaR(x_1, \alpha) \geq \omega I$). Bei Vorliegen eines liquiden und eines illiquiden Assets lässt sich diese Bedingung aus *Abbildung 3* ablesen:

Abbildung 3: Die unterschiedlichen Portfoliowerte



Für ein konkretes $x_1 \geq l/\mu_1$ ist der Portfoliowert sicher und entspricht somit auch dem VaR. Im Bereich $x_1 < l/\mu_1$ wird dann, wenn die Liquiditätsanforderung nicht eintritt, das heißt mit Wahrscheinlichkeit $1-p_l$, der hohe nichtliquidierte Portfoliowert ($V_0(x_1)$) erzielt. Mit einer größeren Wahrscheinlichkeit kann jedoch nur der niedrige liquidierte Portfoliowert ($V_1(x_1)$) erreicht werden und entspricht somit für $\alpha > (1-p_l)$ dem Value-at-Risk in diesem Bereich, das heißt der Anleger geht davon aus, dass er das illiquide Asset liquidieren muss.

In den Situationen 1, 2 und 3b ist der maximale Portfoliowert sicher und damit gleich dem VaR, da im Optimum auch bei Eintritt des Liquiditätsbedarfs keine Liquidierung des illiquiden Assets notwendig ist. Da der VaR für $\alpha > (1-p_l)$ nie größer als der erwartete Portfoliowert ist, wird sowohl der maximale erwartete Portfoliowert als auch der höchste VaR bei der gleichen Aufteilung erreicht. Somit ist die Anforderung im Maximum entweder erfüllt oder von keinem Portfolio erfüllbar.

Im Folgenden wird somit ausschließlich Situation 3a analysiert, in welcher vollständig in das illiquide Asset investiert wird (vgl. *Abbildung 2*). Inwiefern die Risikorestriktion einen Einfluss auf das Optimierungsergebnis hat, hängt von dem genauen Verlauf des Portfoliowerts bei Liquidierung $(V_1 = VaR)$ ab und wird anhand der folgenden Situationsbeschreibungen analysiert.

Abbildung 4: Zielfunktion und VaR (1)

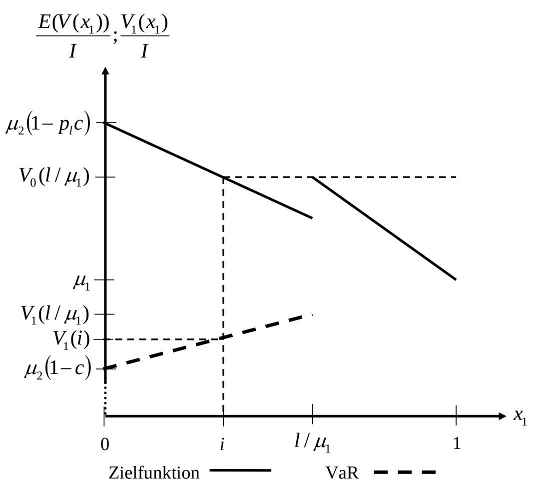
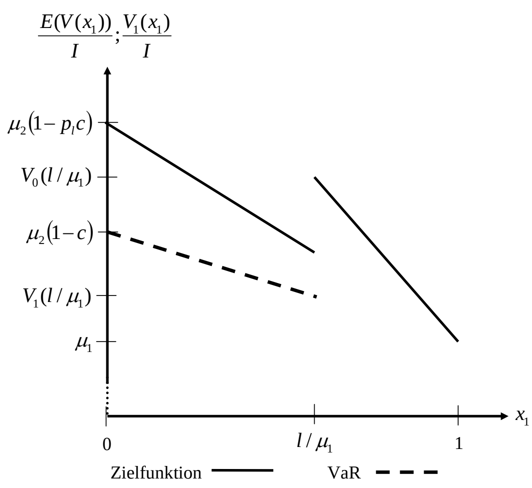


Abbildung 5: Zielfunktion und VaR (2)



1. Situation $\mu_2(1-c) < \mu_1$: In dieser Situation steigt der Value-at-Risk im Bereich $x_1 < l/\mu_1$ mit zunehmendem Anteil des liquiden Assets am Portfolio (vgl. *Abbildung 4*). Je nach Höhe der vom Anleger festgelegten Risikountergrenze ω sind hier folgende Möglichkeiten zu unterscheiden: Ist die Untergrenze kleiner gleich dem niedrigsten erreichbaren Portfoliowert $(\omega \le \mu_2(1-c))$, so wird die Nebenbedingung von allen Aufteilungen erfüllt. Liegt die Untergrenze über diesem Wert, so ist die Nebenbedingung bindend für die Optimierung und das Optimum verschiebt sich kontinuierlich mit Erhöhung von ω nach rechts: Um die Risikonebenbedingung zu erfüllen, muss mehr in das liquide Asset investiert werden als zur Maximierung des erwarteten Portfoliowerts ohne Nebenbedingung gewünscht wäre. Diese kontinuierliche Verschiebung erfolgt allerdings nur bis zum Anteil *i*, bei welchem der zugehörige erwartete Portfoliowert dem Wert in $x_1 = l/\mu_1$ entspricht (also für $\omega \le V_1(i)$ mit $i = \dfrac{l + \mu_2(1 - l/\mu_1) - \mu_2(1-p_lc)}{\mu_1 - \mu_2(1-p_lc)}$, vgl. *Abbildung 4*). Ab hier $(\omega > V_1(i))$ ist nun stets das

Vorhalten des Liquiditätsbedarfs im liquiden Asset optimal, da für diese Aufteilung sowohl der erwartete Portfoliowert als auch der VaR unter den noch zulässigen Aufteilungen maximal werden.

2. Situation $\mu_1 < \mu_2(1-c)$: In dieser Situation verläuft der VaR für $x_1 < l/\mu_1$ fallend im Anteil des liquiden Assets (vgl. *Abbildung 5*). Die vollständige Investition in das illiquide Asset bleibt nun solange optimal, bis die Untergrenze der Risikonebenbedingung größer als der vollständig liquidierte Wert dieses Portfolios ($\mu_2(1-c)$) ist. Ist das der Fall, so springt das Optimum - falls die Nebenbedingung noch erfüllbar ist - wieder auf $x_1 = l/\mu_1$.

Ergebnis 2:

Im Gegensatz zur Portfoliooptimierung mit lediglich liquiden Assets konnte feststellt werden, dass unter Berücksichtigung der Besonderheiten illiquider Assetklassen aufgrund der Liquiditätsanforderung trotz sicherer Renditen ein Optimierungsproblem unter Unsicherheit vorliegt und dass die Risikoaversion des Anlegers - ausgedrückt durch eine Risikorestriktion - die optimale Lösung verändern kann. Verwendet man als Risikomaß den Value-at-Risk, so kann die Nebenbedingung dazu führen, dass ein gemischtes Portfolio optimal ist, obwohl das Maximum des erwarteten Portfoliowerts bei vollständiger Investition in das illiquide Asset angenommen wird.

II. Risiko in der liquiden Assetklasse

In der weiteren Analyse wird davon ausgegangen, dass zunächst nur die Rendite des liquiden Assets risikobehaftet ist.[6] Die Annahmen aus Abschnitt *I* gelten weiterhin, wobei (AW) durch (AW') ersetzt wird.

(AW') *Assetauswahl:* Die Rendite der liquiden Assetklasse und somit auch ihre Wertentwicklung ist normalverteilt[7] mit $y_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\sigma_1 > 0$. Die Wertentwicklung der illiquiden Assetklasse (μ_2) ist sicher. Die Zufallsgröße y_1 und der Eintritt des Liquiditätsbedarfs sind stochastisch unabhängig.

1. Analyse der Zielfunktion

Durch die Einführung des Risikos in der liquiden Assetklasse verändert sich an der Zielfunktion lediglich die Wahrscheinlichkeit, dass das illiquide Asset liquidiert werden muss ($(E(b))(x_1)$). Bisher konnte die Liquidierung des illiquiden Assets sicher verhindert werden, indem mindestens der diskontierte Liquiditätsbedarf in das liquide Asset mit sicherer Wertentwicklung investiert wurde ($x_1 = l/\mu_1$). Dies ändert sich durch das Risiko beim liquiden Asset. So kann es sein, dass selbst für ein $x_1 \geq l/\mu_1$ der Wert des liquiden Assets nach einer Periode nicht ausreicht, um einen eintretenden Liquiditätsbedarf zu decken ($Ix_1 y_1 < Il$) und umgekehrt. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert im liquiden Asset kleiner ist als der gegebenenfalls eintretende Liquiditätsbedarf, ist nun nicht mehr diskret, sondern eine im Anteil des liquiden Assets stetige Funktion, die neben der Höhe des Liquiditätsbedarfs auch vom Anlagebetrag im liquiden Asset und der Verteilung der Wertentwicklung $y_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ abhängig ist. Diese Wahrscheinlichkeit lässt sich durch Standardisierung von y_1 über die Standardnormalverteilung Φ bestimmen:

$$P(Iy_1 x_1 < Il) = P(y_1 < \frac{l}{x_1}) = P(\frac{y_1 - \mu_1}{\sigma_1} < \frac{l/x_1 - \mu_1}{\sigma_1}) = \Phi(\frac{l/x_1 - \mu_1}{\sigma_1}).$$

Wird ein Teilbetrag in das liquide Asset investiert, ist die Liquidierung nur notwendig, wenn die Liquiditätsanforderung eintritt (Wahrscheinlichkeit p_l) *und gleichzeitig* der Wert des liquiden Assets nicht für den Liquiditätsbedarf ausreicht. Erfolgt die Anlage nur im illiquiden Asset, so ist immer eine Liquidierung notwendig, wenn der Liquiditätsbedarf eintritt. Für die Liquidierungswahrscheinlichkeit ergibt sich somit in Abhängigkeit vom Anlagebetrag im liquiden Asset

$$(E(b))(x_1) = P(b=1) = \begin{cases} p_l & , x_1 = 0 \\ \Phi(\frac{l/x_1 - \mu_1}{\sigma_1}) p_l & , x_1 > 0 \end{cases} \quad \text{(beachte } \lim_{x_1 \to 0} \Phi(\frac{l/x_1 - \mu_1}{\sigma_1}) p_l = p_l \text{)} \qquad (4)$$

Da die Standardnormalverteilung streng monoton steigend mit $\lim_{z \to \infty} \Phi(z) = 1$ ist, steigt die erwartete Wertentwicklung des illiquiden Assets kontinuierlich mit dem Anteil des liquiden Assets. Das illiquide Asset hat somit seine minimale erwartete Wertentwicklung $\mu_{2,\min} = \mu_2(1 - p_l c)$ bei $x_1 = 0$ und die maximale erwartete Wertentwicklung $\mu_{2,\max} = \mu_2(1 - \Phi(\frac{l - \mu_1}{\sigma_1}) p_l c)$ bei $x_1 \approx 1$. Wie auch im Fall zweier sicherer Wertentwicklungen (vgl. Abschnitt *I.1*) soll nun untersucht werden, inwiefern die Besonderheiten illiquider Assets das Optimierungsergebnis im Vergleich zu liquiden Assets beeinflussen. Zunächst wird wiederum allein die Zielfunktion ohne Beachtung der Risikorestriktion betrachtet. Bei lediglich liquiden Assets wird vollständig in das Asset mit der höheren erwarteten Wertentwicklung investiert. Durch die Besonderheiten illiquider Assets sind folgende 3 Situationen zu unterscheiden:

1. Situation $\mu_{2,\max} \le \mu_1$: Hier wird durch vollständige Investition in das liquide Asset der maximale erwartete Portfoliowert erzielt (vgl. *Abbildung 6*).

2. Situation $\mu_{2,\min} \le \mu_1 < \mu_{2,\max}$: In dieser Situation sind bei der Bestimmung, welche Aufteilung des Anlagebetrags den erwarteten Portfoliowert maximiert, unterschiedliche Effekte zu beachten (vgl. *Abbildung 6*). Wird, ausgehend von $x_1 = 0$, mehr in das liquide Asset (und weniger in das illiquide Asset) investiert, so steigt der erwartete Portfoliowert, da einerseits mehr in das Asset mit der (zunächst) höheren Wertentwicklung investiert wird und gleichzeitig die Rendite auf den Restbetrag im illiquiden Asset - wie oben gezeigt - steigt. Dieser doppelt positive Effekt auf die erwartete Portfoliowertentwicklung bei Erhöhung von x_1 hält an, bis die erwartete Wertentwicklung des illiquiden Assets größer gleich der des liquiden Assets ist. Bei einer weiteren Steigerung von x_1 wird eine höhere Geldanlage in das liquide Asset mit dann niedrigerer erwarteter Rendite in Kauf genommen, um die erwartete Wertentwicklung des illiquiden Assets weiter zu steigern – allerdings bezogen auf einen sinkenden Anlagebetrag im illiquiden Asset. Bei welchem x_1 sich diese gegenläufigen Effekte ausgleichen und damit das Maximum des erwarteten Portfoliowerts erreicht wird, lässt sich über die Nullstelle der Ableitung des erwarteten Portfoliowerts nach x_1 numerisch bestimmen:

$$\frac{\partial E(V(x_1))}{\partial x_1} = I\left[\mu_1 - \mu_2 + \mu_2 p_l c\left(\Phi(\frac{l/x_1 - \mu_1}{\sigma_1}) + (1-x_1)\varphi(\frac{l/x_1 - \mu_1}{\sigma_1})\frac{l}{\sigma_1 x_1^2}\right)\right]^8$$

Da die Ableitung für geringe Anteile des liquiden Assets positiv und für hohe Anteile negativ ist, hat diese genau eine Nullstelle für $x_1 \in (0,1)$ und es existiert ein inneres Maximum des erwarteten Portfoliowerts (Beweis siehe Anhang *A 2*). Damit wird der maximale erwartete Portfoliowert stets durch eine Aufteilung des Anlagebetrags auf *beide* Assets erzielt. Die Empfehlung, nur in das illiquide Asset zu investieren, welche sich ohne Berücksichtigung der Besonderheiten illiquider Assets ergibt, würde - wie auch in *I.1* gezeigt - zu einem deutlich niedrigeren erwarteten Portfoliowert führen.

3. Situation $\mu_1 < \mu_{2,\min}$: Bleibt die erwartete Wertentwicklung des liquiden Assets stets kleiner als die des illiquiden Assets (vgl. *Abbildung 7*), so muss wie in Abschnitt *I.1* untersucht werden, ob es besser ist, vollständig in das illiquide Asset zu investieren (Situation 3a) oder dessen erwartete Rendite durch Investition in das liquide Asset zu erhöhen (Situation 3b). Ausgehend von $x_1 = 0$ fällt in dieser Situation der erwartete Portfoliowert mit Erhöhung des Anteils des liquiden Assets, da dessen erwartete Rendite kleiner ist als die des

illiquiden Assets in diesem Punkt. Nähert sich der Anteil des liquiden Assets dem diskontierten Liquiditätsbedarf, so wird es sehr viel wahrscheinlicher, dass dieser Anteil zur Deckung des Bedarfs ausreicht. Der erwartete Portfoliowert kann einen steigenden Verlauf haben. Wird die Wahrscheinlichkeit für das Ausreichen des liquiden Anteils sehr groß, so nimmt dieser Effekt wieder ab und es kommt eventuell zu einem inneren lokalen Maximum. Dies ist allerdings wiederum abhängig von den Parametern. Um zu bestimmen, ob die vollständige Investition in das illiquide Asset oder eine gemischte Lösung optimal ist, wird das lokale innere Maximum der Zielfunktion ermittelt (falls vorhanden, vgl. Anhang *A 2*) und der Zielfunktionswert an dieser Stelle mit dem erwarteten Portfoliowert für $x_1 = 0$ verglichen.

Abbildung 6: Zielfunktion in Situation 1 und 2

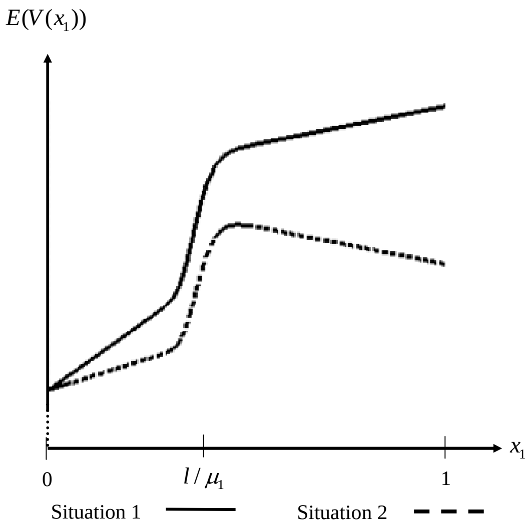
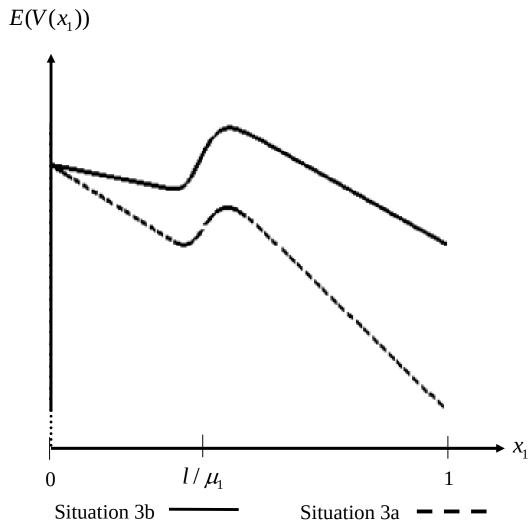


Abbildung 7: Zielfunktion in Situation 3



Mit der durchgeführten Analyse lassen sich somit für die Maximierung des erwarteten Portfoliowerts mit einer unsicheren liquiden und einer sicheren illiquiden Assetklasse folgende Ergebnisse festhalten:

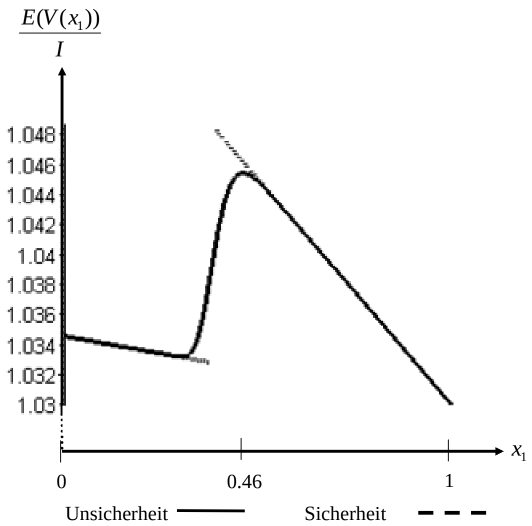
Ergebnis 3:

Wie im Fall mit sicheren Renditen kann sich auch bei einer risikobehafteten Rendite des liquiden Assets im Maximum des erwarteten Portfoliowerts eine Aufteilung des Anlagebetrags auf beide Assetklassen ergeben. Zudem ändert sich - im Gegensatz zu einer Optimierung mit lediglich liquiden Assets - der Verlauf der Zielfunktion (erwarteter Portfoliowert) bei einer Veränderung der Varianz des liquiden Assets, wodurch sich im Maximum eine andere Aufteilung ergeben kann.

Beispiel 2:

Gegeben sei die Situation aus Beispiel 1 mit einem Aktienportfolio mit $y_1 \sim N(1.03, 0.1^2)$ anstelle des Tagesgeldkontos. In dieser Situation ist die höchste erwartete Wertentwicklung des illiquiden Assets $\mu_{2,\max} = \mu_2(1-\Phi(\frac{l-\mu_1}{\sigma_1})p_l c) \approx 1.06$ und die niedrigste - wie in Beispiel 1 - $\mu_{2,\min} = \mu_2(1-p_l c) \approx 1.0346$. Somit befindet sich der Anleger auch hier in Situation 3. Wie man in *Abbildung 8* sehen kann, besitzt die Zielfunktion ein Maximum bei $x_1 \approx 0.46$ mit einem erwarteten Portfoliowert von $\approx 1.045I$.

Abbildung 8: ZF im Vergleich zum sicheren Fall



Da die Daten aus dem Beispiel im sicheren Fall mit dem Maximum bei $x_1 = 0.39$ bis auf das Risiko unverändert blieben, wird hier also mit (ceteris paribus) *zunehmendem Risiko mehr in das unsichere, liquide Asset investiert* und nicht - wie vielleicht intuitiv erwartet - weniger. Dies liegt daran, dass in diesem Beispiel die Wahrscheinlichkeit, dass das illiquide Asset verkauft werden muss, durch die Erhöhung der Varianz erst für einen größeren Anteil des liquiden Assets so gering ist, dass der Renditevorteil zum liquiden Asset wieder überwiegt und sich das Maximum damit nach rechts verschiebt. Das Risiko im liquiden Asset hat weiterhin die Auswirkung, dass nur noch ein geringerer erwarteter Portfoliowert realisiert werden kann (1.045*I* im Vergleich zu 1.048*I* in Beispiel 1). *Abbildung 9* zeigt den optimalen Anteil des liquiden Assets ceteris paribus in Abhängigkeit der Varianz für zwei unterschiedliche Liquiditätsanforderungen (l = 0.8 und l = 0.4) und veranschaulicht, dass unter Unsicherheit x_1 im Maximum jedoch nicht immer größer ist als unter Sicherheit. Eine Erhöhung der Varianz des liquiden Assets kann also sowohl zu einer Erhöhung als auch einer Verringerung seines Anteils am Portfolio führen. *Abbildung 10* zeigt den Zielfunktionsverlauf im sicheren und unsicheren Fall für $l = 0.8$ und verdeutlicht, wieso es in *Abbildung 9* auch Bereiche der Varianz gibt, in welchen die vollständige Investition in das illiquide Asset den erwarteten Portfoliowert maximiert. Grund dafür ist, dass das innere Maximum abhängig von der Varianz höher oder niedriger als der Randwert sein kann. Damit kann es bei einem risikobehafteten liquiden Asset besser sein, vollständig in das illiquide Asset zu investieren, während es bei sicheren Renditen noch sinnvoll ist, den eventuell benötigten Betrag im liquiden Asset vorzuhalten.

Abbildung 9: Optimum und Varianz

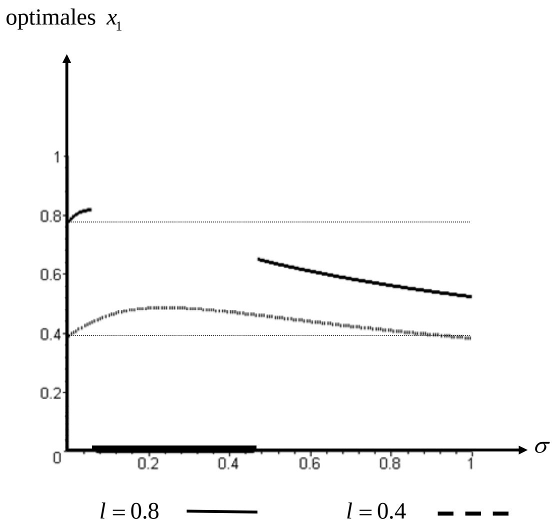
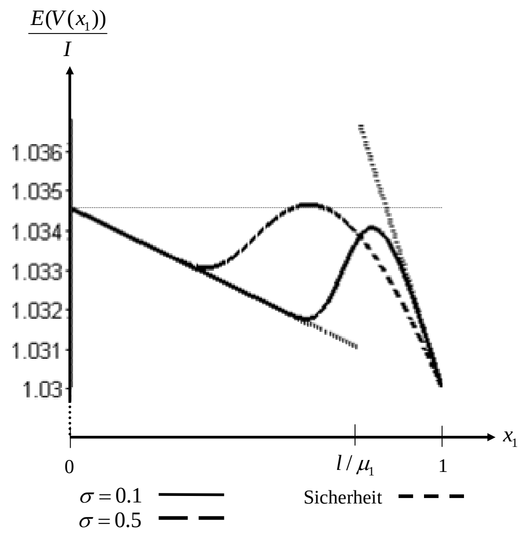


Abbildung 10: ZF für l = 0.8



2. Analyse der Nebenbedingung

Da die Rendite des liquiden Assets risikobehaftet ist, liegt die Vermutung nahe, dass im Vergleich zum Fall mit zwei sicheren Assetklassen die Risikorestriktion des Kunden einen stärkeren Einfluss auf das Optimierungsergebnis hat. Bevor die Besonderheiten bei illiquiden Assetklassen analysiert werden, wird zunächst die Wirkung der VaR-Nebenbedingung für zwei liquide Assets - eines mit sicherer und eines mit normalverteilter Rendite - betrachtet. Der Value-at-Risk ist hier gleich dem $(1-\alpha)$-Quantil der ebenfalls normalverteilten Portfoliowertverteilung und damit entspricht die Risikorestriktion einer linearen Nebenbedingung an den Anteil des unsicheren Assets.[9] Es ergibt sich somit nur dann eine relevante Einschränkung durch die Nebenbedingung, wenn die erwartete Rendite des unsicheren Assets höher ist als die Rendite des sicheren Assets.

Ist nun das „sichere" Asset illiquide, so ist dessen tatsächliche Wertentwicklung - wie in *I.2* gezeigt - ebenso risikobehaftet. Es kann sich durch die Risikoaversion beispielsweise ergeben, dass sowohl der Anteil des unsicheren liquiden als auch des illiquiden Assets nach oben beschränkt wird. Dies soll im Folgenden genauer aufgezeigt werden.

Für $x_1 = 0$ ist der VaR - wie in *I.2* - gleich dem liquidierten Portfoliowert bei vollständiger Investition in das illiquide Asset. Aufgrund der Normalverteilungsannahme kann es nun für alle Anteile (größer 0) des unsicheren liquiden Assets - wenn auch für manche sehr unwahrscheinlich - beim Eintritt des Liquiditätsbedarfs notwendig sein, das sichere illiquide Asset zu liquidieren. Damit setzt sich die Verteilung des Portfoliowerts für alle $x_1 \in (0,1]$ aus der Summe des, mit der jeweiligen Eintrittswahrscheinlichkeit gewichteten, vollständig liquidierten beziehungsweise unliquidierten Portfoliowerts zusammen:

$$
\begin{aligned}
F_{V(x_1)}(z) &= P(V(x_1) \le z) = P(V_1(x_1) \le z)P(b=1) + P(V_0(x_1) \le z)P(b=0) \\
&= \Phi\left(\frac{z - I(1 - x_1\mu_1 - (1-x_1)\mu_2(1-c))}{Ix_1\sigma_1}\right)(E(b))(x_1) \qquad (5) \\
&+ \Phi\left(\frac{z - I(1 - x_1\mu_1 - (1-x_1)\mu_2)}{Ix_1\sigma_1}\right)(1-(E(b))(x_1))
\end{aligned}
$$

Da die Portfoliowertverteilung stetig und streng monoton steigend ist, ist der Value-at-Risk gleich dem ($1-\alpha$)-Quantil, das heißt genau dem Wert, der mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ erreicht wird (vgl. Anhang *A 3*). Je nach Höhe der Varianz des liquiden Assets, wird die im Fall zweier sicherer Assetklassen festgestellte (vgl. *I.2)*, sprunghafte Erhöhung des Portfoliowerts bei $x_1 = l/\mu_1$ durch die Normalverteilung stärker oder schwächer ausgeglättet. Bei hinreichend geringer Varianz kann also mit zunehmendem Anteil des unsicheren, liquiden Assets das Risiko trotzdem sinken (d. h. der VaR steigen), weil es sehr viel wahrscheinlicher wird, dass das illiquide Asset nicht veräußert werden muss und der Portfoliowert damit trotzdem steigt. Zur Verdeutlichung der Effekte zeigt *Abbildung 11* beispielhaft den erwarteten Portfoliowert zusammen mit dem Value-at-Risk bei zunächst niedrigem Konfidenzniveau von 0.55 in Situation 3a aus Abschnitt *1*.

Ausgehend von $x_1 = 0$ steigt hier der VaR, weil aufgrund des niedrigen Signifikanzniveaus das Risiko (in Form der Varianz) in der Nebenbedingung schwach gewichtet wird und somit durch Hinzunahme des unsicheren Assets, welches eine höhere Rendite als das vollständig liquidierte illiquide Asset hat, zunächst ein höherer Portfoliowert mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit erreicht werden kann. Ab einem gewissen Anteil überwiegt allerdings das hinzugewonnene Risiko die Chance auf einen höheren Portfoliowert, weil die Differenz zwischen bereits (mit Wahrscheinlichkeit α) erreichbarer Portfoliorendite und der erwarteten Rendite des unsicheren Assets immer geringer wird, die Zunahme des Risikos mit dessen Anteil jedoch konstant bleibt. Damit sinkt der VaR nun wiederum solange, bis sich die Wahrscheinlichkeit, dass das illiquide Asset liquidiert werden muss, signifikant verringert und die erwartete Rendite des illiquiden Assets somit so stark steigt, dass dies auch für den VaR gilt. Erreicht diese Liquidierungswahrscheinlichkeit einen Wert nahe 0, so wird annähernd der nichtliquidierte Portfoliowert erzielt. Dieser ist normalverteilt und damit hat der VaR einen mit weiterer Erhöhung von x_1 nahezu linear fallenden Verlauf.

Abbildung 11: Zielfunktion und VaR (3a)

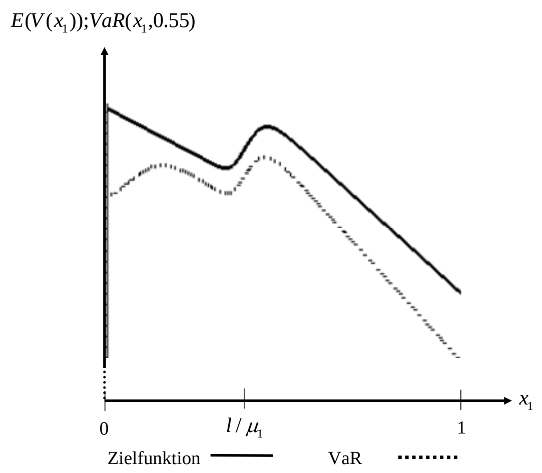
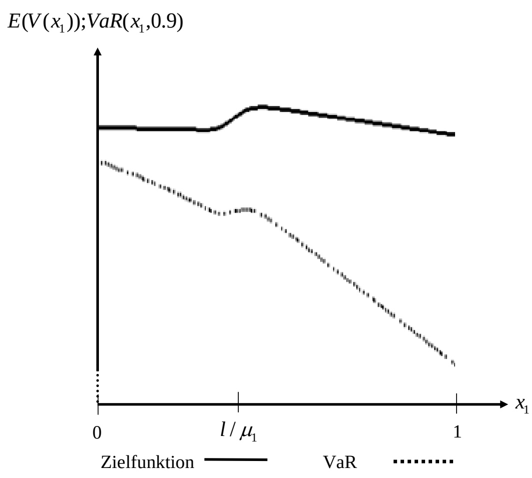


Abbildung 12: Zielfunktion und VaR (3b)



Wie *Abbildung 11* zeigt, können diese Effekte dazu führen, dass der Anteil des liquiden unsicheren Assets sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt wird (hier sogar in zwei getrennten Bereichen) und die Risikorestriktion somit einen Einfluss auf die optimale Portfoliozusammensetzung hat.

Ist das Signifikanzniveau - wie meistens der Fall - hoch (vgl. *Abbildung 12*), so ist der VaR bereits ab $x_1 \approx 0$ fallend im Anteil des liquiden Assets, da die Zunahme des Risikos sehr stark gewichtet wird. Je nach Renditeunterschied der beiden Assets und der Varianz des liquiden Assets kann das lokale Maximum des VaR, welches durch die Reduzierung der Liquidierungswahrscheinlichkeit entsteht, dennoch erhalten bleiben. Da dieses allerdings auf die gleichen Effekte wie das innere Maximum der Zielfunktion zurückgeht, liegt es im selben Bereich und hat damit meist einen geringen Einfluss auf das Optimum. Wie *Abbildung 12* zeigt, erhält man somit für die Nebenbedingung ähnliche Ergebnisse wie bei Vernachlässigung der Besonderheiten illiquider Assets. Durch den stark fallenden Verlauf des VaR bei hohem Signifikanzniveau kann sich durch die Risikorestriktion eine so starke Beschränkung des Anteils des liquiden Assets ergeben, dass sowohl ein Maximum der Zielfunktion bei vollständiger Investition in das liquide Asset als auch bei einer Mischlösung nicht angenommen werden kann, da diese die Nebenbedingung nicht erfüllen.

Die Betrachtung der Nebenbedingung führt somit zu folgendem Ergebnis:

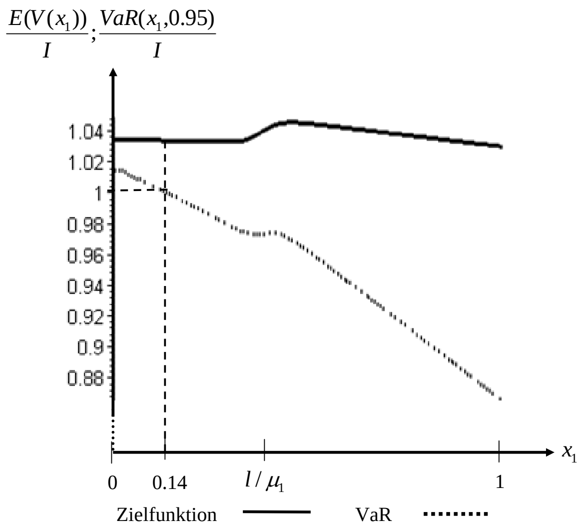
Ergebnis 4:

Vernachlässigt man die Besonderheiten illiquider Assets, so ist der Portfoliowert normalverteilt und damit der VaR linear im Anteil des unsicheren Assets. Dies ist bei Berücksichtigung dieser besonderen Eigenschaften nicht zwingend der Fall. So kann es auch sein, dass das Risiko mit steigendem Anteil des unsicheren, liquiden Assets sogar sinkt, obwohl dieses auch die niedrigere erwartete Rendite aufweist. Hat die Risikorestriktion bei einer Optimierung mit lediglich liquiden Assets nur einen Einfluss auf das Optimum, wenn das unsichere Asset die höhere erwartete Rendite aufweist, so kann es im Fall eines illiquiden Assets auch sein, dass aufgrund der Nebenbedingung eine gemischte Lösung optimal ist, obwohl das sichere illiquide Asset die höhere Rendite besitzt.

Beispiel 2, Fortsetzung:

Zur Vervollständigung von Beispiel 2 soll dem Anleger mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 Prozent mindestens der angelegte Betrag erhalten bleiben ($\alpha = 0.95, \omega = 1$). Wie *Abbildung 13* zeigt, erlaubt die Anforderung des Anlegers höchstens einen Anteil des liquiden unsicheren Assets von ca. 14 %. Da der erwartete Portfoliowert in diesem Bereich mit steigendem Anteil des liquiden Assets fällt, ist somit die vollständige Investition in das illiquide Asset optimal.

Abbildung 13: Zielfunktion und Nebenbedingung in Beispiel 2



In diesem Beispiel bewirkt also die Nebenbedingung, dass das Maximum des erwarteten Portfoliowerts nicht realisiert werden kann, obwohl die Rendite des sicheren illiquiden Assets höher als die des unsicheren liquiden Assets ist. Bei einer Optimierung ohne illiquide Assets wäre die Nebenbedingung hier irrelevant.

III. Risiko in beiden Assetklassen

Die Annahmen aus Abschnitt *II* werden nun abschließend um die Unsicherheit der Wertentwicklung des illiquiden Assets sowie einer Korrelation zwischen den Wertentwicklungen der beiden Assets erweitert. Annahme (AW'') ersetzt dabei (AW'):

(AW'') *Assetauswahl:* Die Renditen beider Assetklassen sind risikobehaftet. Ihre Wertentwicklungen sind normalverteilt und korreliert, also $y_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$; $y_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$; $\sigma_1, \sigma_2 > 0$; $cor(y_1, y_2) := \rho$.

Im Rahmen dieser Erweiterung ist insbesondere die Abhängigkeit des erwarteten Portfoliowerts von der Varianz des illiquiden Assets und der Korrelation der beiden Renditen von Interesse. Die Einflüsse der Nebenbedingung sollen hier nicht weiter untersucht werden, da die Analyse der Nebenbedingung zu keinen zusätzlichen interessanten Ergebnissen im Vergleich zu Abschnitt *II.2* führt. Wie bereits in Abschnitt *II.1* dargestellt, ist der erwartete Portfoliowert bei einer Optimierung mit ausschließlich liquiden Assets völlig unabhängig von deren Varianz. Bei einer Optimierung mit illiquiden Assets unter Berücksichtigung einer Liquiditätsanforderung gibt es hingegen Abhängigkeiten sowohl von den Varianzen als auch von der Korrelation der beiden Renditen.

Aufgrund der Korrelation sind nun auch y_2 und b abhängig und es folgt für den erwarteten Portfoliowert (für eine ausführliche Berechnung siehe Anhang *A 4*):

$$E(V(x_1)) = I[x_1\mu_1 + (1-x_1)\mu_2 - (1-x_1)E(y_2 1_{(-\infty, l/x_1)}(y_1))\, p_l c],$$

wobei $1_{(-\infty, l/x_1)}(.)$ die Indikatorfunktion bezeichnet, d. h. $1_{(-\infty, l/x_1)}(y_1) = \begin{cases} 1 & , y_1 < l/x_1 \\ 0 & , sonst \end{cases}$.

Sind die beiden Renditen unabhängig, so ergibt sich:

$$E(y_2 1_{(-\infty, l/x_1)}(y_1)) = E(y_2)E(1_{(-\infty, l/x_1)}(y_1)) = \mu_2 P(y_1 < l/x_1) = \mu_2 \Phi(\frac{l/x_1 - \mu_1}{\sigma_1})$$

Der erwartete Portfoliowert ist dann also der gleiche wie in Abschnitt *II.1* und damit unabhängig von der Varianz des illiquiden Assets.

Im Folgenden soll nun aufgezeigt werden, welchen Einfluss die Varianz des illiquiden Assets und die Korrelation zwischen den beiden Assets auf den erwarteten Portfoliowert haben können. Dazu wird zunächst folgendes Beispiel verwendet:

Beispiel 3:

Der Anleger möchte ein Kapital in Höhe von I = 100.000 Euro für die nächsten 5 Jahre (eine Periode) anlegen. Dabei stehen ihm ein Aktienportfolio mit erwarteter jährlicher Rendite von 4 % ($\mu_1 = 1.04^5$) und eine Kapitallebensversicherung mit erwarteter jährlicher Rendite von 6 % ($\mu_2 = 1.06^5$) zur Verfügung. Beide Assetklassen haben auf die 5 Jahre eine Varianz von 25 % ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$). Am Ende dieser 5 Jahre wird mit Wahrscheinlichkeit 80 % ($p_l = 0.8$) eine Liquidität von 60.000 Euro benötigt ($l = 0.6$). Muss die Lebensversicherung zu diesem Zeitpunkt liquidiert werden, so entsteht aufgrund des Verlusts der teilweisen Steuerfreiheit der Kapitalerträge ein angenommener prozentualer Verlust von 10 % ($c = 0.1$).

Abbildung 14 zeigt den in dieser Situation zu erwartenden Portfoliowert in Abhängigkeit von der Korrelation der Wertentwicklungen der beiden Assetklassen. Wie man sieht, fällt hier der erwartete Portfoliowert mit sinkender Korrelation. Ist bei einer Korrelation von 0.95 der maximale erwartete Portfoliowert – angenommen für $x_1 = 0.516$ – noch circa $1.259\, I$, so wird mit unkorrelierten Renditen lediglich ein Maximum von $1.252\, I$ – bei $x_1 = 0.543$ – erreicht. Herrscht eine negative Korrelation von -0.95, so hat das Optimum – welches für $x_1 = 0.577$ angenommen wird – nur noch einen Wert von rund $1.246\, I$. Dieses Ergebnis lässt sich wie folgt erklären: Sind die Renditen der beiden Assets perfekt korreliert, so ist der Wert des illiquiden Assets immer dann hoch, wenn auch der Wert des liquiden Assets hoch ist und umgekehrt. Ist nun der Wert des liquiden Assets so niedrig, dass das illiquide Asset liquidiert werden muss, so hat dieses ebenfalls einen niedrigen Wert und erfährt somit einen geringen absoluten Verlust. Hat das liquide Asset hingegen einen hohen Wert, so muss das illiquide Asset nicht verkauft werden und dessen nun ebenfalls hoher Wert bleibt verlustfrei erhalten. Mit sinkender Korrelation wird dieser Effekt immer schwächer und kehrt sich bei perfekt negativer Korrelation schließlich um: Muss das illiquide Asset liquidiert werden, weil der Wert des liquiden Assets zu niedrig ist, um den Bedarf zu decken, so hat es zwar einen hohen Wert aber somit auch einen hohen absoluten Verlust. Der erwartete Portfoliowert ist also niedriger. Hält man nun die Korrelation bei 0.95 fest und variiert die Standardabweichung des illiquiden Assets (vgl. *Abbildung 15),* so steigt der erwartete Portfoliowert bei positiver Korrelation mit steigender Varianz des illiquiden Assets. Bei negativer Korrelation ist es umgekehrt. Grund für dieses Ergebnis sind ähnliche Effekte wie für die Abhängigkeit von der Korrelation: Sind beide Assets positiv korreliert, so bleiben hohe Gewinne verlustfrei erhalten und niedrige Renditen erwirtschaften nur einen geringen Liquidierungsverlust. Erhöht man die Varianz des illiquiden Assets, so werden sowohl noch höhere als auch niedrigere Renditen noch wahrscheinlicher. Aufgrund des genannten Effekts steigt der erwartete Portfoliowert. Sind die beiden Assets negativ korreliert, so müssen diese höheren Werte liquidiert werden. Die Folge sind höhere Verluste beim Verkauf des illiquiden Assets und ein insgesamt niedrigerer erwarteter Portfoliowert.

Abbildung 14: Erwarteter Portfoliowert in Abhängigkeit der Korrelation

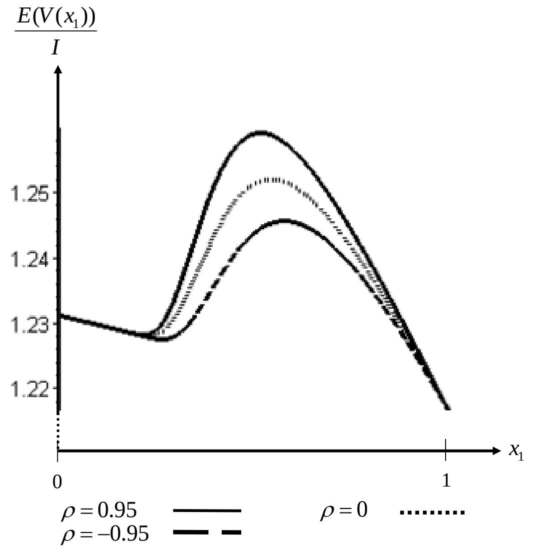
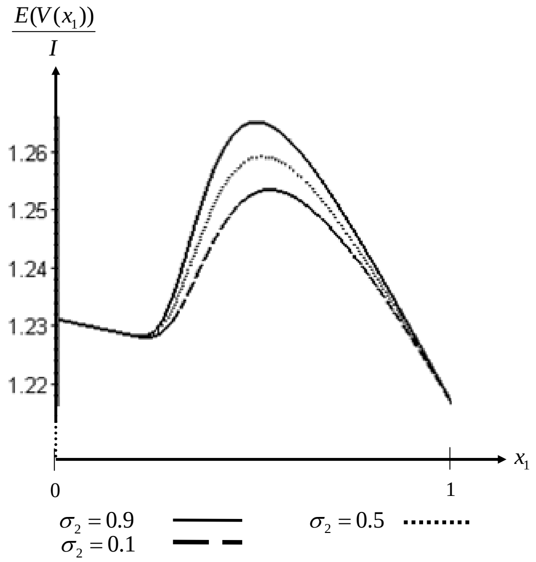


Abbildung 15: Erwarteter Portfoliowert in Abhängigkeit der Varianz des illiquiden Assets



Die genannten Effekte sind natürlich stark abhängig von der jeweiligen Parameterkonstellation. So hat zum Beispiel die Varianz der Rendite des illiquiden Assets - wie bereits erläutert - keinen Einfluss auf den erwarteten Portfoliowert, wenn die beiden Renditen unabhängig sind.

Die dargestellten Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Ergebnis 5:

Ist die Rendite des illiquiden Assets risikobehaftet, jedoch unabhängig von der Rendite des liquiden Assets, so bleibt der erwartete Portfoliowert zu dem in Kapitel II.1 unverändert und somit völlig unabhängig von der Varianz des illiquiden Assets. Weisen die beiden Wertentwicklungen eine Korrelation ungleich 0 auf (damit sind sie abhängig), so verändert sich der erwartete Portfoliowert mit der Varianz des illiquiden Assets. Bei positiver Korrelation steigt, bei negativer Korrelation sinkt dieser mit steigender Varianz. Lässt man die Varianzen unverändert und variiert lediglich die Korrelation, so kann eine steigende Korrelation zu einem steigenden maximalen Portfoliowert führen und umgekehrt. Dies steht im Gegensatz zur positiven Beurteilung negativer Korrelationen im Hinblick auf Risikodiversifikationseffekte bei der Portfoliooptimierung mit lediglich liquiden Assets.

D. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde anhand eines einperiodigen Modells mit einer liquiden und einer illiquiden Assetklasse der Einfluss der Besonderheiten illiquider Assets auf die Portfoliooptimierung untersucht. Diese Besonderheiten wurden dadurch definiert, dass eine illiquide Anlage stets nur vollständig verkauft werden kann und dieser Verkauf, wenn er kurzfristig erfolgt, Kosten verursacht. Unter der weiteren Annahme, dass mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ein Liquiditätsbedarf des Anlegers eintritt, konnten durch Analyse der Zielfunktion - dem erwarteten Portfoliowert - signifikante Unterschiede zur Optimierung mit lediglich liquiden Assets festgestellt werden. So kann anstatt der vollständigen Investition in das renditestärkere Asset nun eine gemischte Lösung zu einer Maximierung des erwarteten Portfoliowerts führen. Ebenso wurde gezeigt, das sowohl das Risiko in den beiden Assets als auch deren Korrelation Einfluss auf den erwarteten Portfoliowert haben können, welcher ohne Berücksichtigung der Besonderheiten illiquider Assets völlig unabhängig vom Risiko ist. Die Untersuchung der Nebenbedingung - Vorgabe einer Grenze für den Value-at-Risk - zeigte, dass der Portfoliowert bereits bei sicheren Renditen aufgrund der Liquiditätsanforderung risikobehaftet ist und die Nebenbedingung bereits in diesem Fall Auswirkungen auf die optimale Aufteilung der Assets haben kann. Mit risikobehaftetem liquiden Asset wurde des Weiteren festgestellt, dass die Risikorestriktion nicht nur dann relevant werden kann, wenn das unsichere Asset die höhere Rendite aufweist, sondern auch dann, wenn die Rendite des sicheren (illiquiden) Assets höher ist.

Mit diesem Beitrag konnte somit bereits in einfachen Situationen gezeigt werden, dass die Besonderheiten illiquider Assets einen großen Einfluss auf die optimale Portfoliostruktur haben können.

Anhang

A 1 Sensitivitätsanalyse und vollständige Angabe der Parametergrenzen der optimalen Aufteilung bei sicheren Renditen (C.I.1)

Für eine kurze Sensitivitätsanalyse der optimalen Aufteilung wird davon ausgegangen, dass die Ungleichung *(3)* $(\mu_2(1-p_l c) < (\frac{l}{\mu_1})\mu_1 + (1-\frac{l}{\mu_1})\mu_2)$ erfüllt ist und somit die gegebenenfalls benötigte Liquidität im liquiden Asset vorgehalten wird ($x_1 = l/\mu_1$). Steigt ceteris paribus der benötigte Liquiditätsbedarf (l), so müsste mehr Liquidität vorgehalten, das heißt im liquiden Asset mit der niedrigeren Rendite mehr angelegt werden, um eine Liquidierung des illiquiden Assets zu verhindern. Die erwartete Rendite von Aufteilung (b) sinkt dadurch, wohingegen die erwartete Rendite, wenn vollständig in das illiquide Asset investiert wird (Aufteilung (a)), unverändert bleibt. Dadurch kann sich eine Veränderung der optimalen Lösung ergeben, hin zur vollständigen Investition in das illiquide Asset. Dies ist auch dann der Fall, wenn bei sonst gleich bleibenden Parametern die Rendite des liquiden Assets sinkt beziehungsweise die des illiquiden Assets steigt, das heißt, wenn sich die Differenz zwischen den beiden Renditen vergrößert ($\mu_2 - \mu_1$). Auch diese Veränderung würde den erwarteten Portfoliowert bei vollständiger Investition in das illiquide Asset gegenüber dem erwarteten Wert des gemischten Portfolios verbessern. Im Gegensatz dazu wird es mit steigender Wahrscheinlichkeit für den Liquiditätsbedarf (p_l) sowie für steigenden prozentualen Verlust bei dessen Eintritt (c) immer sinnvoller, den benötigten Betrag liquide vorzuhalten (hier sind die partiellen Ableitungen der Zielfunktion in Fall a negativ, in Fall b gleich 0).

Die beschriebenen Auswirkungen lassen sich durch Gegenüberstellung der partiellen Ableitungen beider Fälle auch formal darstellen:

Fall a: $E(V(x_1)) = I[\mu_2(1-p_l c)]$	Fall b: $E(V(x_1)) = I\left[\frac{l}{\mu_1}\mu_1 + (1-\frac{l}{\mu_1})\mu_2\right]$
$\frac{\partial E(V(x_1))}{\partial l} = 0$	$\frac{\partial E(V(x_1))}{\partial l} = I\left[1-\frac{\mu_2}{\mu_1}\right] < 0$
$\frac{\partial E(V(x_1))}{\partial \mu_1} = 0$	$\frac{\partial E(V(x_1))}{\partial \mu_1} = I\left[l\,\frac{\mu_2}{\mu_1^2}\right] > 0$

$$\frac{\partial E(V(x_1))}{\partial \mu_2} = I[1 - p_l c] > 0$$

$$\frac{\partial E(V(x_1))}{\partial \mu_2} = I\left[1 - \frac{l}{\mu_1}\right] > 0$$

Das heißt, solange $(1 - p_l c) > (1 - l/\mu_1) \Leftrightarrow l > \mu_1 p_l c$ gilt (der Liquiditätsbedarf also nicht minimal ist), wird der Portfoliowert in Fall a durch die Erhöhung von μ_2 stärker verbessert als in Fall b. Wie bereits erläutert wird bei höherem Liquiditätsbedarf die vollständige Investition in das illiquide Asset durch Erhöhung seiner Rendite gestärkt, bei sehr niedrigem Bedarf ist dies nicht mehr der Fall.

$$\frac{\partial E(V(x_1))}{\partial p_l} = I[-\mu_2 c] < 0$$

$$\frac{\partial E(V(x_1))}{\partial c} = I[-\mu_2 p_l] < 0$$

$$\frac{\partial E(V(x_1))}{\partial p_l} = 0$$

$$\frac{\partial E(V(x_1))}{\partial c} = 0$$

Das Vorhalten des eventuell benötigten Betrags ist in Situation 3 genau dann optimal, wenn die Parameter folgende Ungleichungen erfüllen:

$$E(V(0)) < E(V(\frac{l}{\mu_1})) \Leftrightarrow \mu_2(1 - p_l c) < (\frac{l}{\mu_1})\mu_1 + (1 - \frac{l}{\mu_1})\mu_2 \Leftrightarrow \mu_2(1 - p_l c) < l + \mu_2 - \frac{l}{\mu_1}\mu_2$$

$$\Leftrightarrow \mu_1 > \frac{l\mu_2}{\mu_2 p_l c + l} \Leftrightarrow \mu_2 < \frac{l\mu_1}{l - \mu_1 p_l c} \Leftrightarrow l < \frac{\mu_1 \mu_2 p_l c}{\mu_2 - \mu_1} \Leftrightarrow p_l > \frac{l(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1 \mu_2 c} \Leftrightarrow c > \frac{l(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1 \mu_2 p_l}$$

A 2 Steigung des erwarteten Portfoliowerts bei einem unsicheren liquiden Asset (C.II.1)

Um die Existenz eines inneren Maximums nachzuweisen, wird die Steigung der Zielfunktion an den Rändern überprüft. In der 2. Situation aus *C.II.1* gilt $\mu_2(1 - p_l c) \leq \mu_1 < \mu_2(1 - \Phi\left(\frac{l - \mu_1}{\sigma_1}\right)p_l c)$.

Damit folgt für die Steigung in $x_1 = 0$:

$$\frac{\partial E(V(0))}{\partial x_1} = I \lim_{x_1 \to 0}\left[\mu_1 - \mu_2 + \mu_2 p_l \Phi\left(\frac{l/x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)c - (1 - x_1)\mu_2 p_l \varphi\left(\frac{l/x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)\left(-\frac{l}{\sigma_1 x_1^2}\right)c\right]$$

$$= I\left[\mu_1 - \mu_2 + \mu_2 p_l c\left(1 + (1 - 0)\lim_{x_1 \to 0}\varphi\left(\frac{l/x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)\frac{l}{\sigma_1 x_1^2}\right)\right]$$

$$\geq I\left[\mu_2(1-p_l c)-\mu_2+\mu_2 p_l c\left(1+(1-0)\lim_{x_1\to 0}\varphi\left(\frac{l/x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\frac{l}{\sigma_1 x_1^2}\right)\right]$$

$$= I\mu_2 p_l c\lim_{x_1\to 0}\varphi\left(\frac{l/x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\frac{l}{\sigma_1 x_1^2}=0$$

Für die Steigung in $x_1 = 1$ ergibt sich:

$$\frac{\partial E(V(1))}{\partial x_1} = I\left[\mu_1-\mu_2+\mu_2 p_l \Phi\left(\frac{l-\mu_1}{\sigma_1}\right)c-(1-1)\mu_2 p_l \varphi\left(\frac{l-\mu_1}{\sigma_1}\right)(-\frac{l}{\sigma_1})c\right]$$

$$< I[\left[\mu_2\left(1-p_l\Phi\left(\frac{l-\mu_1}{\sigma_1}\right)c\right)-\mu_2+\mu_2 p_l\Phi\left(\frac{l-\mu_1}{\sigma_1}\right)c\right]=0$$

Da somit die Steigung des erwarteten Portfoliowerts für $x_1 = 0$ positiv (bei Gleichheit wird sie unmittelbar nach einer Erhöhung von x_1 positiv) und für $x_1 = 1$ negativ ist, muss aufgrund der Stetigkeit ein inneres Maximum existieren. Aufgrund der Ausführungen in *C.II.1* über den Verlauf des erwarteten Portfoliowerts ist dieses auch das einzige lokale Maximum.

Da in der 3. Situation aus *C.II.1* $\mu_1 < \mu_2(1-p_l c)$ gilt, folgt unmittelbar:

$$\frac{\partial E(V(0))}{\partial x_1} = I\left[\mu_1-\mu_2(1-p_l c)\left(1+\lim_{x_1\to 0}\varphi\left(\frac{l/x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\frac{l}{\sigma_1 x_1^2}\right)\right] = I[\mu_1-\mu_2(1-p_l c)]<0$$

Das heißt zunächst, dass der erwartete Portfoliowert in $x_1 = 0$ mit steigendem Anteil im liquiden Asset fällt, es muss also nicht zwingend eine Nullstelle geben. Existiert jedoch eine Nullstelle, so gibt es gleich 2 innerhalb (0,1), da zuerst ein Minimum und ein anschließendes Maximum notwenig sind, damit an den Rändern jeweils negative Steigungen vorherrschen können. Das innere Maximum liegt somit eindeutig bei der größeren der beiden Nullstellen.

A 3 Portfoliowertverteilung bei einem unsicheren liquiden Asset (C.II.2)

Um die Verteilung des Portfoliowerts zu berechnen, kann man sie auf die Situationen aufteilen, in denen eine Liquidierung notwendig ($V_1(x_1)$) beziehungsweise nicht notwendig ($V_0(x_1)$) ist:

$$F_{V(x_1)}(z) = P(V(x_1)\leq z) = P(V_1(x_1)\leq z)P(b=1)+P(V_0(x)\leq z)P(b=0).$$

Da y_1 normalverteilt ist, folgt für $V_0(x_1)$ und $V_1(x_1)$:

$$P(V_0(x_1) \le z) = P(I(y_1 x_1 + \mu_2(1-x_1)) \le z) = \Phi\left(\frac{(z - I\mu_2(1-x_1))/(Ix_1) - \mu_1}{\sigma_1}\right)$$

$$P(V_1(x_1) \le z) = P(I(y_1 x_1 + \mu_2(1-x_1)(1-c)) \le z) = P\left(y_1 \le \frac{z - I\mu_2(1-x_1)(1-c)}{Ix_1}\right)$$
$$= P\left(\frac{y_1-\mu_1}{\sigma_1} \le \frac{(z - I\mu_2(1-x_1)(1-c))/(Ix_1) - \mu_1}{\sigma_1}\right) = \Phi\left(\frac{(z - I\mu_2(1-x_1)(1-c))/(Ix_1) - \mu_1}{\sigma_1}\right)$$

Damit erhält man insgesamt:

$$F_{V(x_1)}(z) = P(V(x_1) \le z) =$$
$$\Phi\left(\frac{z - I(1-\mu_1 x_1 - \mu_2(1-x_1)(1-c))}{Ix_1\sigma_1}\right)(E(b))(x_1) \tag{6}$$
$$+\Phi\left(\frac{z - I(1-\mu_1 x_1 - \mu_2(1-x_1))}{Ix_1\sigma_1}\right)(1-(E(b))(x_1))$$

An der Darstellung ist erkennbar, dass es sich hierbei um eine Mischung zweier normalverteilter Zufallsgrößen mit unterschiedlichem Erwartungswert und gleicher Varianz handelt. Zuerst lässt sich feststellen, dass dies keine lineare Kombination in x_1 ist, da $(E(b))(x_1)$ nicht linear in x_1 ist. Der VaR wird somit auch nicht linear abhängig von dem Anteil des liquiden Assets sein, wohl aber stetig: Der Sprung, der sich bei sicheren Renditen (vgl. *C.I.2*) ergibt, wird durch die Normalverteilung der Rendite des illiquiden Assets ausgeglättet.

Ist $x_1 = 0$, so besteht das Portfolio nur aus dem sicheren illiquiden Asset. Für ein $\alpha \in (1-p_l, 1]$ ergibt sich somit für den Value-at-Risk dessen liquidierter Wert:

$$VaR(0,\alpha) = I\mu_2(1-c)$$

Für $x_1 > 0$ ist das Portfolio die Summe einer binomial- und einer normalverteilten Zufallsgröße. Damit ist $F_{V(x_1)}(z)$ stetig und streng monoton steigend in z und es folgt $P(V(x_1) \ge z) = 1 - P(V(x_1) \le z) = 1 - F_{V(x_1)}(z)$ und somit $VaR(x_1,\alpha) = \arg_z\{P(V(x_1) \ge z) = \alpha\}$ $= \arg_z\{F_{V(x_1)}(z) = 1-\alpha\}$. Der VaR ist also das $(1-\alpha)$-Quantil der Portfoliowertverteilung. Für die Risikonebenbedingung ergibt sich daraus: $VaR(x_1,\alpha) = \arg\max_z\{F_{V(x_1)}(z) = 1-\alpha\} \ge \omega I$

A 4 Erwarteter Portfoliowert bei zwei unsicheren Assets (C.III)

Zur Berechnung des erwarteten Portfoliowerts wird dieser wieder auf die Bedingungen, dass der Liquiditätsbedarf wirklich eintritt (Wahrscheinlichkeit p_l) beziehungsweise nicht eintritt (Wahrscheinlichkeit $1-p_l$) aufgeteilt. Bei eintretendem Liquiditätsbedarf muss das illiquide Asset immer dann liquidiert werden, wenn der Wert des liquiden Assets nicht ausreicht diesen zu bedienen, also $y_1 < l/x_1$ ist (formal mit einer Indikatorfunktion beschrieben ist $b = 1_{(-\infty,l/x_1)}(y_1)$). Ansonsten ist eine Liquidierung nicht nötig ($b=0$), weil ohnehin kein Bedarf besteht. Da ausschließlich b vom Liquiditätsbedarf abhängt, folgt damit:

$$\begin{aligned}
&E(V(x_1)) = I(E[x_1 y_1 + (1-x_1)y_2(1-1_{(-\infty,l/x_1)}(y_1)c)]p_l + (x_1\mu_1 + (1-x_1)\mu_2)(1-p_l))\\
&= I([x_1 E(y_1) + (1-x_1)E(y_2) - (1-x_1)E(y_2 1_{(-\infty,l/x_1)}(y_1))c]p_l + (x_1\mu_1 + (1-x_1)\mu_2)(1-p_l))\\
&= I(x_1\mu_1 + (1-x_1)\mu_2 - (1-x_1)E(y_2 1_{(-\infty,l/x_1)}(y_1))p_l c)
\end{aligned}$$

Dabei gilt für eine Korrelation ρ mit $|\rho|<1$:

$$E(y_2 1_{(-\infty,l/x_1)}(y_1)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{l/x_1} z_2 f_{(y_1,y_2)}(z_1,z_2)dz_1 dz_2 \text{ , mit}$$

$$\begin{aligned}
&f_{(y_1,y_2)}(z_1,z_2) =\\
&\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{z_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \left(\frac{2\rho(z_1-\mu_1)(z_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right) + \left(\frac{z_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right)\right),
\end{aligned}$$

wobei $f_{(y_1,y_2)}(z_1,z_2)$ die gemeinsame zweidimensionale Dichte der Wertentwicklungen der beiden Assetklassen ist.

Sind die Wertentwicklungen der beiden Assets perfekt positiv oder negativ korreliert, so kann man von einem linearen Zusammenhang zwischen ihnen ausgehen. Für $\rho = \pm 1$ gibt es also zwei reelle Zahlen $\alpha \neq 0, \beta$ – welche im konkreten Fall anstelle der Korrelation anzugeben sind – mit $P(y_2 = \alpha y_1 + \beta) = 1$ und damit folgt:

$$\begin{aligned}
&E(y_2 1_{(-\infty,l/x_1)}(y_1)) = E((\alpha y_1 + \beta)1_{(-\infty,l/x_1)}(y_1)) = \alpha E(y_1 1_{(-\infty,l/x_1)}(y_1)) + \beta E(1_{(-\infty,l/x_1)}(y_1))\\
&= \alpha\int_{-\infty}^{l/x_1} z f_{y_1}(z)dz + \beta\int_{-\infty}^{l/x_1} f_{y_1}(z)dz = \alpha\int_{-\infty}^{l/x_1}\frac{z}{\sigma_1}\varphi\left(\frac{z-\mu_1}{\sigma_1}\right)dz + \beta\int_{-\infty}^{l/x_1}\frac{1}{\sigma_1}\varphi\left(\frac{z-\mu_1}{\sigma_1}\right)dz\ .
\end{aligned}$$

Literatur

Albrecht, Peter; Maurer, Raimond; Möller, Matthias (1998): Shortfall-Risiko/Excess-Chance-Entscheidungskalküle – Grundlagen und Beziehungen zum Bernoulli-Prinzip, in: Zeitschrift für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, 118, S. 249-274.

Albrecht, Peter; Maurer, Raimond (2005): Investment- und Risikomanagement – Modelle, Methoden, Anwendungen, Stuttgart.

Artzner, Philippe; Delbaen, Freddy; Eber, Jean-Marc; Heath, David (1999): Coherent Measures of Risk, in: Mathematical Finance, 9, S. 203-228.

Baule, Rainer (2004): Wertorientiertes Kreditportfoliomanagement, Dissertation, Universität Göttingen.

Buhl, Christian (2004): Liquidität im Risikomanagement, Dissertation, Universität St. Gallen.

Breuer, Wolfgang (2000): Hedging und Reputationsaufbau auf Terminmärkten, Kredit und Kapital, 33, S. 99-136.

Breuer, Wolfgang; Gürtler, Marc; Schuhmacher, Frank (2006): Portfoliomanagement II – Weiterführende Anlagestrategien, Wiesbaden.

Constantinides, George M. (1976): Stochastic Cash Management with Fixed and Proportional Transaction Costs, in: Management Science, 22, S. 1320-1331.

Constantinides, George M. (1986): Capital Market Equilibrium with Transaction Costs, in: Journal of Political Economy, 94, S. 842-862.

Cottier, Philipp (1997): Hedge Funds and Managed Futures: Performance, Risks, Strategies and Use in Investment Portfolios, Bern.

Faig, Miquel; Shum, Pauline (2002): Portfolio Choice in the Presence of Personal Illiquid Projects, in: The Journal of Finance, 57 (1), S. 303-328.

Huang, Ming (2003): Liquidity shocks and equilibrium liquidity premia, in: Journal of Economic Theory, 109, S. 104-129.

Jobst, Norbert J.; Horniman, Michael D.; Lucas, Cormac A.; Mitra, Guatam (2001): Computational Aspects of Alternative Portfolio Selection Models in the Presence of Discrete Asset Choice Constraints, in: Quantitative Finance, 1, S. 489-501.

Kataoka, Shinji (1963): A Stochastic Programming Model, in: Econometrica, 31 (1-2), S. 181-196.

Kempf, Alexander (1998): Was messen Liquiditätsmaße?, in: Die Betriebswirtschaft, 58 (3), S. 299-311.

Mansini, Renata; Speranza, Maria G. (1999): Heuristic Algorithms for the Portfolio Selection Problem with Minimum Transaction Lots, in: European Journal of Operational Research, 114, S. 219-233.

Markowitz, Harry M. (1952): Portfolio Selection, in: The Journal of Finance, 7, S. 77-91.

Morton, Andrew J.; Pliska, Stanley R. (1995): Optimal Portfolio Management with Fixed Transaction Costs, in: Mathematical Finance, 5, S. 337-356.

Rockafellar, R. Tyrrell; Uryasev, Stanislav (2002): Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions, in: Journal of Banking and Finance, 26, S. 1443-1471.

Roy, A. D. (1952): Safety First and the Holding of Assets, in: Econometrica, 20 (3), S. 431-449.

Ruda, Walter (1988): Ziele privater Kapitalanleger, Wiesbaden.

Schneeweiß, Hans (1967): Entscheidungskriterien bei Risiko, Berlin.

Schroder, Mark (1995): Optimal Portfolio Selection with Fixed Transaction Costs: Numerical Solutions, Working Paper, Michigan State University.

Schwartz, Eduardo S.; Tebaldi, Claudio (2004): Illiquid Assets and Optimal Portfolio Choice, Working Paper, University of California.

Spremann, Klaus; Winhart, Stephanie (1997): Humankapital im Portefeuille privater Investoren, in: ZfB, 67 (Ergänzungsheft 3), S. 145-167.

Telser, Lester G. (1955): Safety First and Hedging, in: The Review of Economic Studies, 23, S. 1-16.

Yamai, Yasuhiro; Yoshiba, Toshinao (2005): Value-at-risk versus expected shortfall: A practical perspective, in: Journal of Banking and Finance, 29, S. 997-1015.

Anmerkungen

[1] Die durch A1 und A2 festgelegte Vorgehensweise entspricht dem Safety-First-Ansatz von Telser (1955). Dieser erscheint auch bspw. für Unternehmen sinnvoll, die ihre Insolvenzwahrscheinlichkeit begrenzen bzw. verringern wollen, um anschließend eine hohe Bonitätsbeurteilung zu erhalten (Breuer, 2000, S. 121). Der Ansatz von Telser wird bzgl. seiner entscheidungstheoretischen Fundierung dahingehend kritisiert, dass er nur dann mit dem Bernoulli-Prinzip vereinbar ist, wenn eine bestimmte stückweise lineare Nutzenfunktion und damit u. a. kein abnehmender Grenznutzen unterstellt wird. Dennoch erscheint der gewählte Ansatz in der vorliegenden Entscheidungssituation aus weiteren Gründen besser geeignet, als bspw. ein klassischer μ-σ-Ansatz: So wird das Risiko der nicht-symmetrisch-verteilten Renditen illiquider Assets (siehe A4) durch die Standardabweichung nicht adäquat bewertet (Albrecht und Maurer, 2005, S. 115). *Verteilungsunabhängig* erzwingt die Vereinbarkeit mit dem Bernoulliprinzip auch beim klassischen μ-σ-Prinzip eine nur bedingt plausible quadratische Nutzenfunktion (für weitergehende Diskussionen vgl. bspw. Schneeweiß, 1967, S. 95-100 oder Breuer et al., 2006, S. 140-152). Darüber hinaus sei an dieser Stelle angemerkt, dass eine nach Telser generierte Optimallösung gleichzeitig μ-σ-effizient ist (Breuer et al., 2006, S. 142).

[2] Insbesondere bei einem großen Vermögen wäre es wohl grundsätzlich denkbar, mehrere „kleine“ illiquide Assets anstatt eines „Großen“ in das Portfolio aufzunehmen. Da eine beliebige Teilbarkeit aufgrund der insbesondere bei illiquiden Assets existierenden fixen Grundkosten jedoch ausgeschlossen wird, erscheint hier die Annahme *eines* nicht teilbaren

illiquiden Assets in einem ersten Schritt sinnvoll. Darauf aufbauend kann der Trade-off zwischen mehreren „kleinen“ und wenigen „großen“ illiquiden Assets separat untersucht werden.

[3] Eine unzureichende Bonität könnte bspw. gegeben sein, wenn bei Liquiditätsengpässen des Anlegers der Liquiditäts- und damit Kreditbedarf sehr hoch ist, bei gleichzeitig (ggf. ungerechtfertigt) niedriger Beleihungswerteinschätzung des Kreditgebers. Grundsätzlich hätte die Berücksichtigung einer Zwischenfinanzierungsmöglichkeit eine Minderung der Nachteile des illiquiden Assets zur Folge, da statt der vollständigen Liquidierungskosten nur noch Finanzierungskosten für den Differenzbetrag zwischen Liquiditätsbedarf und dem Wert im liquiden Asset entstehen. Die Hauptergebnisse des Artikels blieben dabei dennoch unverändert: Die Ursache für die Ergebnisse ist die (sprunghafte) Minderung der Rendite des illiquiden Assets bei Eintritt der Liquiditätsanforderung. Diese Renditereduktion tritt – wenn auch in abgeschwächter Form – ebenfalls bei Berücksichtigung einer Zwischenfinanzierungsmöglichkeit ein.

[4] Es wird vorausgesetzt, dass das Konfidenzniveau höher ist, als die Wahrscheinlichkeit, dass die Liquiditätsanforderung nicht eintritt. Wäre die Eintrittswahrscheinlichkeit der Liquiditätsanforderung kleiner als die vom Anleger vorgegebene zulässige Höchstwahrscheinlichkeit für eine Unterschreitung der Mindestrendite, so wäre die Liquiditätsanforderung zu vernachlässigen.

[5] Aufgrund der fehlenden Eigenschaft der Subadditivität für nicht-normalverteilte Zufallsgrößen geriet der Value-at-Risk in letzter Zeit zwar immer mehr in Kritik. Konzepte, die diese Lücke schließen - wie zum Beispiel der Conditional Value-at-Risk (CVaR) - kamen bisher allerdings noch wenig zum Einsatz. Dies liegt wahrscheinlich nicht zuletzt an der schlechteren Kommunizierbarkeit. Da der VaR in den im Folgenden betrachteten Situationen zu den gleichen Ergebnissen wie der CVaR führt und aufgrund der sehr guten Nachvollziehbarkeit eine anschauliche Analyse der Nebenbedingung ermöglicht, stellt er für das weitere Vorgehen ein geeignetes Risikomaß dar.

[6] Im Fall, dass lediglich die Rendite des illiquiden Assets risikobehaftet ist bleiben die wesentlichen Ergebnisse des vorherigen Abschnitts unverändert. Der erwartete Portfoliowert bleibt dabei exakt gleich.

[7] Die hier vorgestellten, wesentlichen Ergebnisse ändern sich nicht, wenn – wie häufig in der Literatur aufzufinden – statt von einer Normalverteilung von einer Lognormalverteilung der

Rendite ausgegangen wird. Zum besseren Verständnis und um eine anschauliche Darstellung zu gewährleisten wird daher eine Normalverteilung angenommen.

[8] $\varphi(z)$ bezeichnet die Dichte der Standardnormalverteilung und damit $\frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{z-\mu}{\sigma})$ die Dichte einer $N(\mu,\sigma^2)$-verteilten Zufallsgröße.

[9] Das $(1-\alpha)$-Quantil einer normalverteilten Zufallsgröße mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ ist gleich $\mu + N_{1-\alpha}\sigma$ ($N_{1-\alpha}$ bezeichnet das $(1-\alpha)$-Quantil der Standardnormalverteilung). Da Erwartungswert und Standardabweichung des Portfoliowerts linear im Anteil des unsicheren Assets sind, gilt dies auch für den VaR.